COURS D'OPTIQUE GEOMETRIQUE

modules S1 G et S1 SM-d

1999-2000

Yves Georgelin

en collaboration avec Marcelle L'Huillier

Table des matières

Première partie

PRINCIPES FONDAMENTAUX

1 Introduction.

La lumière naturelle (par ex. la lumière solaire) est une superposition d'*ondes électromagnétiques* de *longueurs d'ondes* λ différentes.

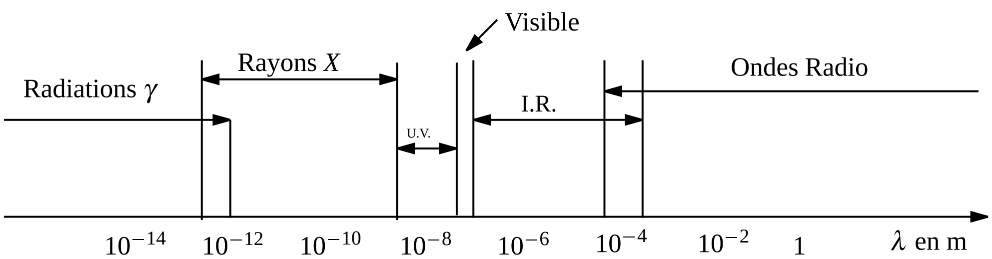


FIG. 1 – Spectre des ondes électromagnétiques.

On sait aussi que cette onde est quantifiée : Existence de "grains de lumière" appelés : *Photons*.

En principe, pour n'importe quelle longueur d'onde ces deux aspects coexistent toujours. Cependant, pour les très grandes longueurs d'onde (ondes radio et plus...), la nature *corpusculaire* de la lumière est difficilement décelable. Aux très petites longueurs d'onde (rayons γ), c'est au contraire la nature corpusculaire qui est le plus facilement mise en évidence (collisions directes de photons avec d'autres particules en physique des particules). La lumière visible est en quelque sorte à mi-chemin : l'aspect ondulatoire peut y être aussi important que l'aspect corpusculaire ; tout dépend du type de phénomènes étudiés.

Dans l'étude de la lumière rencontrant les objets d'échelle macroscopique, la petitesse des longueurs d'onde ($\lambda \sim 10^{-7}$cm) du visible vis à vis des grandeurs des objets qu'elle rencontre ($L \sim 1$cm et plus) a permis d'élaborer une théorie géométrique de la propagation des ondes lumineuses : *L'optique géométrique*.

2 Principes de l’optique géométrique.

On oublie l’aspect ondulatoire et corpusculaire de la lumière et on montre qu’un très grand nombre de phénomènes lumineux observés peut se déduire des principes suivants :

Principe.1. Il existe des *rayons lumineux* qui restent indépendants les uns des autres (pas d’interaction entre eux).

Principe.2. Dans un milieu *homogène, transparent* et *isotrope*, les rayons lumineux sont des *lignes droites*.

Principe.3. À la surface de séparation de deux milieux, les rayons lumineux obéissent aux lois de **Snell-Descartes**.

3 Vérifications expérimentales et commentaires.

3.1 Principe.1.

Définition. On appelle *rayon lumineux*, toute courbe suivant laquelle se propage la lumière.

Remarque.1. Un rayon lumineux n'a pas d'existence réelle car pour isoler un rayon lumineux, il faudrait faire passer la lumière par une ouverture de plus en plus petite et par conséquent d'une dimension devenant du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de cette lumière ; ce qui contredit nos hypothèses. D'ailleurs, si on fait l'expérience, on obtient un nouveau phénomène : *La Diffraction*, qui ne peut être décrite uniquement à partir des principes de l'optique géométrique (fig.2).

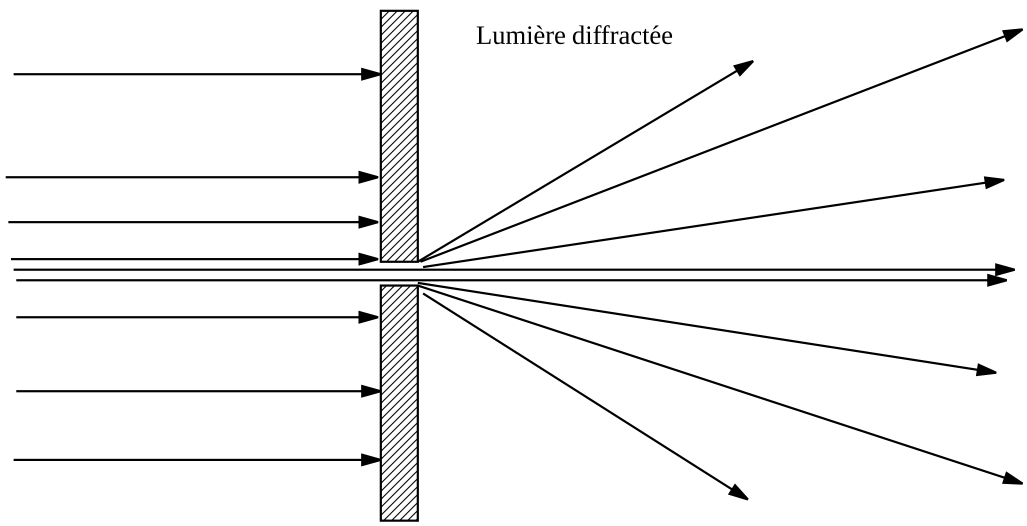


FIG. 2 – Diffraction de la lumière.

Propriété. Deux rayons lumineux se rencontrant, n'interagissent pas (un rayon lumineux ne peut pas être dévié par un autre rayon lumineux).

Remarque.2. Ceci contredit bien sûr la nature “corpusculaire” qu'on attribue par ailleurs à la lumière, et en fait elle s'est avérée fausse car on peut réaliser actuellement des collisions entre photons dans les lasers.

Remarque.3. Cette propriété qu'a la lumière d'être décrite par des rayons n'est pas propre à l'onde lumineuse. Des ultrasons aux longueurs d'onde très courtes par rapport aux dimensions des objets qu'ils rencontrent peuvent être aussi décrits par des rayons géométriques (approximation eikonale) ; d'où la remarque suivante :

Remarque.4. Il faut se garder de dire que la description géométrique de la lumière sous forme de rayons de lumière révèle la nature corpusculaire de celle-ci. *Les rayons de lumière ne sont pas les trajectoires des photons*. En fait un photon n'est pas localisable et ne possède pas de trajectoire au sens de la mécanique classique du point matériel !

3.2 Principe.2.

Lorsque le milieu est *transparent, homogène, isotrope*, les rayons lumineux sont des *droites*.

Nous savons qu'il est impossible d'isoler un seul rayon lumineux à cause des phénomènes de diffraction. On a donc en pratique, des ensembles de rayons lumineux constitués en *faisceaux* lumineux se propageant à travers des ouvertures de tailles variées : les *diaphragmes*. On négligera toujours la diffraction. Les différents types de faisceaux lumineux sont représentés sur la figure.3.

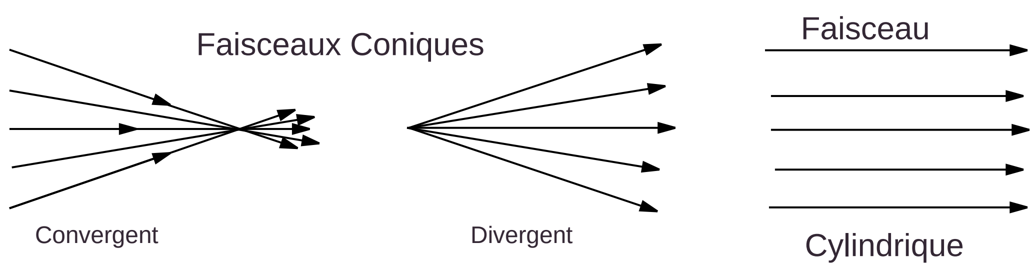


FIG. 3 – Différents faisceaux lumineux.

3.3 Principe.3 : Lois de Snell-Descartes.

Expérience. Faisons arriver un faisceau cylindrique de lumière de longueur d'onde donnée (*Lumière monochromatique*) à la surface de l'eau additionnée de fluorescéine contenue dans une cuve, rendant ainsi visible les trajets lumineux.

On observe :

a- Un faisceau cylindrique *réfléchi* par la surface de l'eau.

b- Un faisceau cylindrique *réfracté* à travers la surface de l'eau.

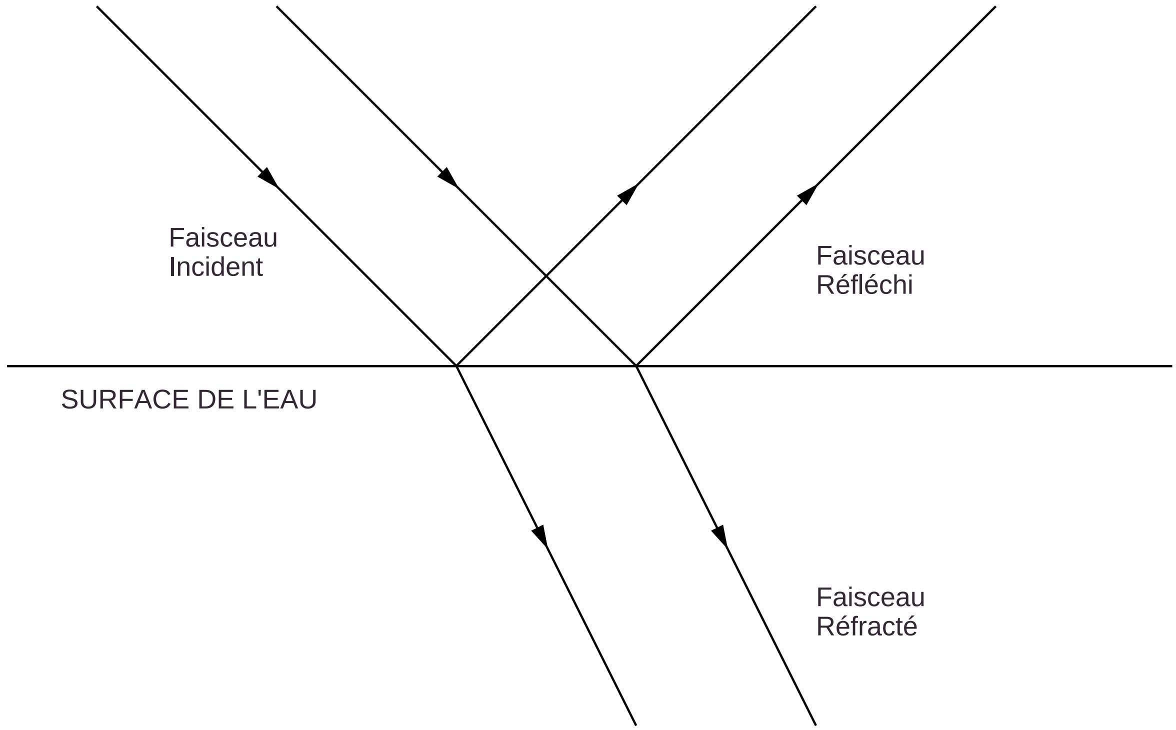


FIG. 4 – Réflexion et réfraction.

Les lois relatives à ces deux phénomènes : la *réflexion* et la *réfraction* décrivant le comportement des rayons lumineux, à la séparation de deux milieux, s'appellent les lois de *Snell-Descartes*.

3.3.1 Réflexion

Considérons un rayon lumineux AI *incident* arrivant sur la surface de séparation S de deux milieux.

Il lui correspond un rayon *réfléchi* IR. Menons la droite normale IN à la surface S en I et située du même côté de S que le rayon incident AI. Le plan défini par le rayon incident AI et la normale IN s'appelle le *plan d'incidence*, l'angle $\widehat{NIR} = r$ est *l'angle de réflexion*.

Lois de la réflexion :

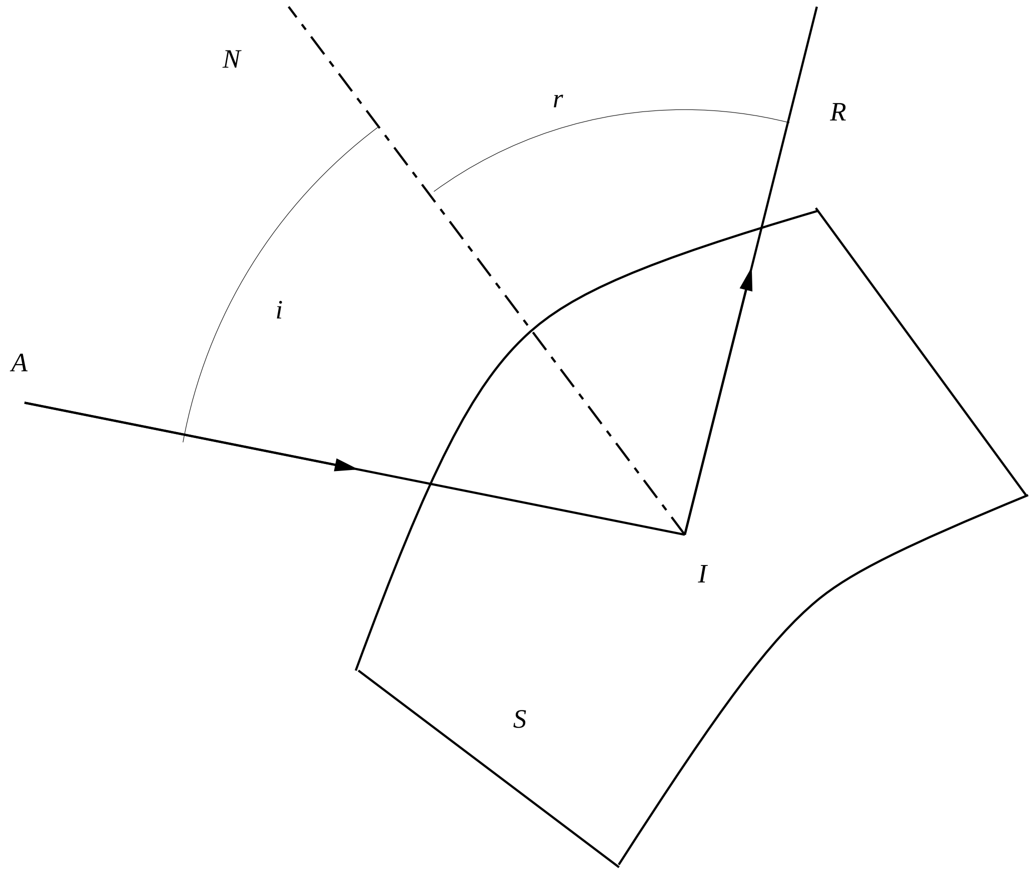


FIG. 5 – Loi de la réflexion.

1. Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.

2. L'angle de réflexion r est égal à l'angle d'incidence i .

$$i = r$$

3.3.2 Réfraction

Soient deux milieux transparents isotropes séparés par une surface S. À un rayon incident AI situé dans le premier milieu correspond dans le second milieu un rayon IR' appelé *rayon réfracté*. Menons la droite normale IN à la surface S. Le plan défini par AI et IN est le plan d'incidence, l'angle $\widehat{AIN} = i_1$ est l'angle d'incidence et l'angle $\widehat{N'IR'} = i_2$ s'appelle *l'angle de réfraction*.

Remarque importante. À la surface de séparation de deux milieux transparents, il existe toujours un rayon réfléchi dès qu'il existe un rayon réfracté ; le rayon réfracté par contre n'existe pas toujours même si le rayon réfléchi existe !

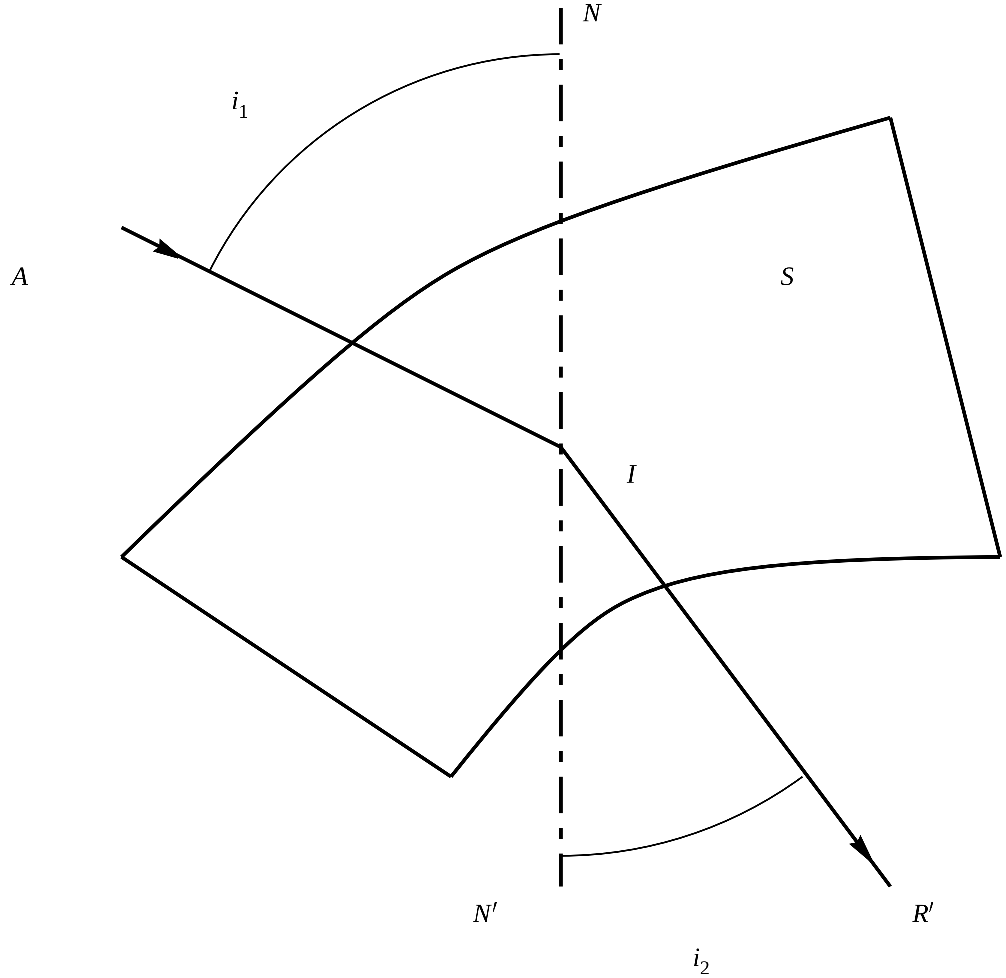


FIG. 6 – Loi de la réfraction.

Lois de la réfraction

1. Le rayon réfracté est dans le plan d'incidence.

2. Pour deux milieux donnés et une lumière de longueur d'onde donnée λ, il existe un rapport constant entre le sinus de l'angle d'incidence i_1 et le sinus de l'angle de réfraction i_2

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n(\lambda)$$

où n est une constante dépendant de λ, on l'appelle *l'indice de réfraction* du milieu 2 par rapport au milieu 1.

Exemple : L'indice de réfraction de l'eau par rapport à l'air est pour la lumière verte d'environ $4/3$.

Remarque. Les lois de Snell-Descartes sont relatives à la réflexion et à la réfraction de rayons lumineux et ne sont donc pas vérifiables directement. On ne peut qu'en faire une grossière vérification en utilisant des faisceaux cylindriques étroits. Nous admettrons ces lois comme hypothèses fondamentales justifiées par leurs conséquences, lesquelles

se trouvent être en bon accord avec les expériences rentrant dans le cadre de *l'optique géométrique*.

4 Propriétés des indices.

1. L'indice $n(\lambda)$ d'un milieu 2 par rapport à un milieu 1 est égal au rapport des vitesses v_1 et v_2 de l'onde lumineuse dans les milieux 1 et 2

$$n(\lambda) = \frac{v_1(\lambda)}{v_2(\lambda)}$$

(Rappelons à ce propos que la vitesse de l'onde lumineuse $v(\lambda)$ dans un milieu quelconque est toujours inférieure à ce qu'elle serait dans le vide.) On aura donc pour trois milieux 1, 2 et 3 où les vitesses respectives de la lumière sont v_1, v_2 et v_3, les indices de ces milieux pris deux à deux

$$n_{2,1} = \frac{v_1}{v_2} \qquad n_{3,1} = \frac{v_1}{v_3} \qquad n_{3,2} = \frac{v_2}{v_3}$$

d'où $n_{3,2} = \frac{n_{3,1}}{n_{2,1}}$

2. L'indice relatif de deux milieux est égal au rapport de leurs indices relatifs à une même substance. Si on prend comme milieu de comparaison *le vide*, on obtient *l'indice absolu*.

Exemple : À 0 degré sous une pression de 76 centimètres de mercure, l'indice absolu de l'air pour la lumière jaune du sodium vaut 1,000292 .

Conséquence 1. Deuxième forme de la loi de la réfraction de Snell-Descartes : Soit n_1 et n_2 les indices absolus de deux substances, alors $n = \frac{n_2}{n_1}$ est l'indice du second par rapport au premier et

$$\sin i_1 = n \sin i_2 = \frac{n_2}{n_1} \sin i_2$$

D'où

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Avec les indices absolus $n_1(\lambda)$ et $n_2(\lambda)$, la deuxième loi de la réfraction prend donc une forme complètement symétrique.

Conséquence 2. De la symétrie de la relation précédente on déduit le *principe du retour inverse de la lumière*. Dans l'expérience de réfraction, si un rayon arrive suivant $R'I$, il se réfracte selon IA : Le trajet de la lumière réfractée ne dépend pas de son sens de propagation. En général, lorsque deux rayons lumineux réfractés ont une partie de trajet identique de *longueur non nulle*, ils sont alors superposés sur tout leur parcours (une conclusion identique s'impose pour les rayons réfléchis).

5 Construction du rayon réfléchi et du rayon réfracté.

a. Pour le rayon réfléchi, il suffit de construire le rayon symétrique du rayon incident par rapport à la normale au point d'incidence.

b. Pour le rayon réfracté d'un milieu d'indice n_1 vers un milieu d'indice n_2 nous devons envisager deux cas.

5.1 $n_2 > n_1$.

Soit $0 \leq i_1 \leq \frac{\pi}{2}$. Du point I, traçons le plan P tangent à S. Deux cercles de rayons respectifs n_1 et n_2 sont tracés dans le plan contenant la normale IN à P et le rayon incident AI. On a alors (fig.7)

$$IH = ID \sin i_1 = ID' \sin i_2$$

donc

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

c'est à dire la relation de Snell-Descartes.

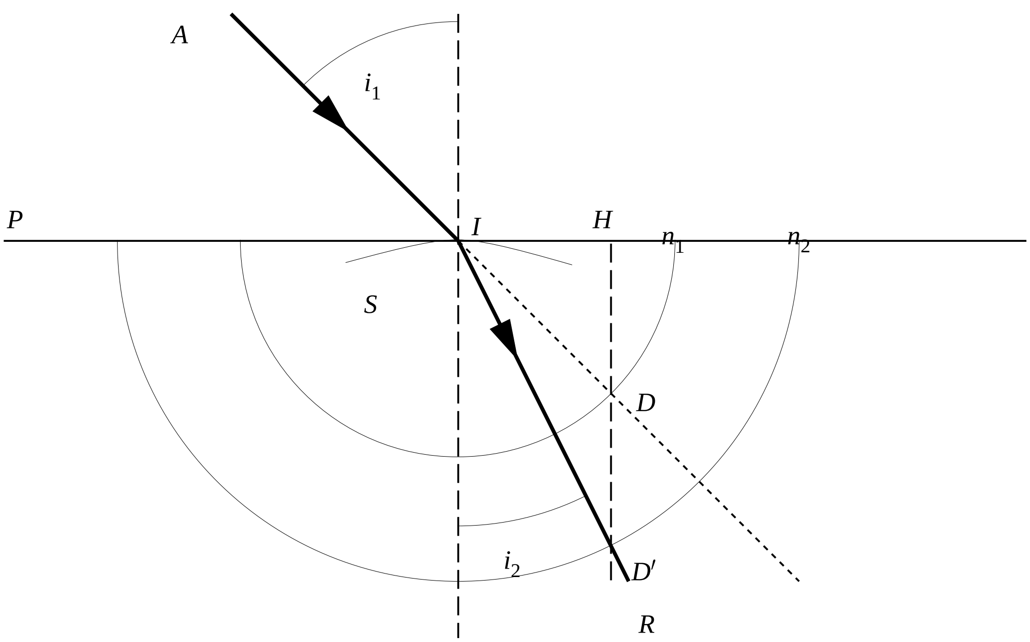


FIG. 7 – Construction du rayon réfracté ($n_2 > n_1$).

Remarque.1. Quelque soit $0 \leq i_1 \leq \frac{\pi}{2}$, le rayon réfracté *existe toujours* et se rapproche de la normale.

Remarque.2. Lorsque i_1 devient pratiquement égal à $\pi/2$, la relation de Snell-Descartes montre que

$$1 = \sin\frac{\pi}{2} = \frac{n_2}{n_1}\sin i_L$$

où l'angle i_L tel que $\sin i_L = \frac{n_1}{n_2}$ est l'angle **maximum** que peut faire le rayon réfracté IR avec la normale à la surface S ; le rayon incident AI est alors tangent en I à S.

5.2 $n_2 < n_1$.

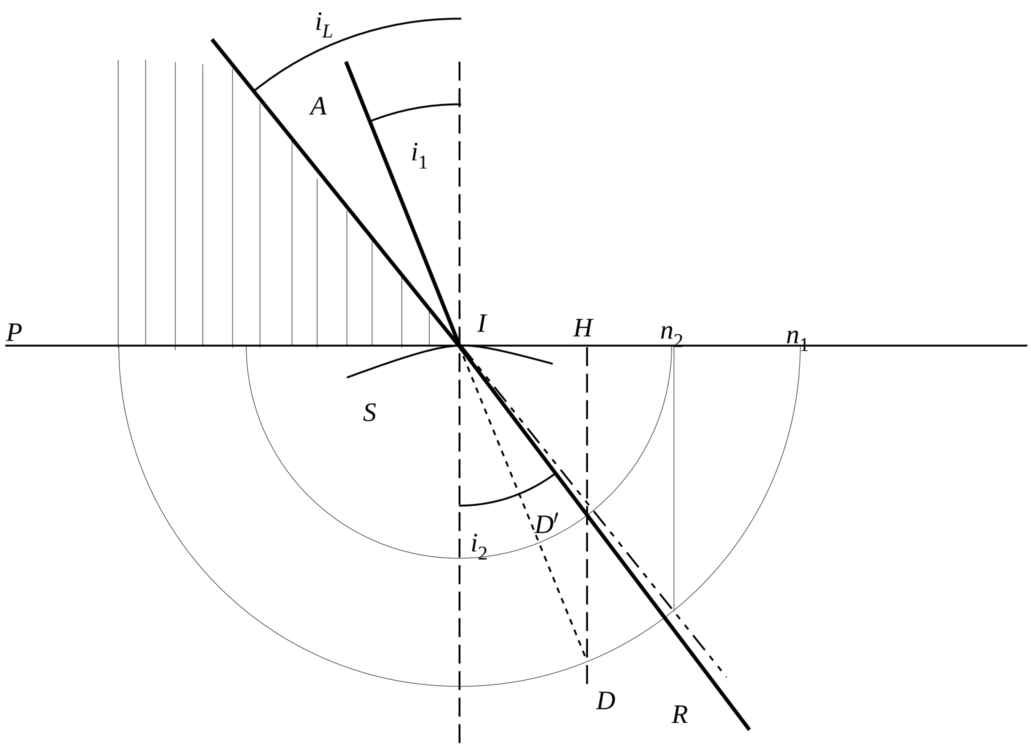


FIG. 8 – Construction du rayon réfracté ($n_2 < n_1$).

On réitère la construction précédente qui *ne donne un rayon réfracté que pour*

$$i_1 < i_L$$

où i_L est tel que pour $i_2 = \frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à un rayon réfracté tangent en I à S

On aura

$$n_1 \sin i_L = n_2 \sin \frac{\pi}{2} = n_2$$

d'où la définition de *l'angle limite* i_L que peut faire le rayon incident avec la normale à S

$$\sin i_L = \frac{n_2}{n_1}$$

Remarque.1. Lorsque le rayon réfracté existe : *il s'écarte de la normale* ; on a toujours $0 \leq i_2 \leq \frac{\pi}{2}$.

Remarque.2. Pour un angle d'incidence $i_1 > i_L$, il *n'y a pas* de rayon réfracté, seul subsiste le rayon réfléchi : il y a *réflexion totale* de la lumière à la surface de séparation des deux milieux. On a constitué ainsi un miroir parfait. Ceci veut dire qu'à part la perte d'intensité de la lumière due aux rugosités plus ou moins importantes de la surface de séparation des deux milieux toute l'énergie lumineuse est réfléchie par la surface.

La réflexion totale est largement mise à profit dans certains appareils d'optique tels que les jumelles où une disposition judicieuse de prismes permet de réaliser des réflexions totales (fig.9). Un des avantages d'un tel dispositif est alors de réduire l'encombrement de l'appareil.

Conditions : La réflexion totale n'est possible que lors du passage de la lumière d'un milieu plus *réfringent* d'indice n_1 vers un milieu moins réfringent d'indice n_2. On observera la surface de l'eau d'une carafe d'eau par les côtés et par en dessous.

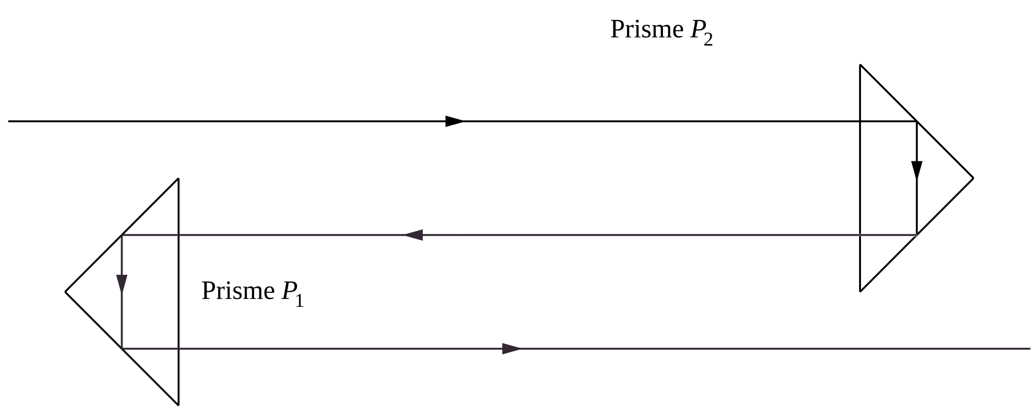


FIG. 9 – Deux prismes à réflexion totale P_1 et P_2.

Deuxième partie

APPLICATIONS AUX SYSTÈMES PLANAIRES

6 Miroirs plans.

Définition. Un *miroir plan* est une surface plane S réfléchissante (Existence d'un rayon lumineux réfléchi décelable).

Remarque. Toute réflexion sur une surface polie est accompagnée d'une perte de lumière soit par absorption, soit par diffusion, soit par réfraction. Dans le cas d'une réflexion totale, ce dernier phénomène disparaissant, il ne subsiste que les deux premiers phénomènes qui ne sont jamais totalement absents.

6.1 Image d'un point.

Soit A un point lumineux, envoyant ses rayons sur un miroir plan M. Un observateur O est situé du même côté du miroir que A.



FIG. 10 – Expérience du miroir plan.

Le point A possède une *image* A', observable par tout observateur O si **tous** les rayons réfléchis par M issus de A semblent provenir de ce point A'.

D'après les lois de Snell-Descartes, le rayon AH perpendiculaire à M est réfléchi sur lui-même. Tout rayon AI passant par I est réfléchi symétriquement par rapport à la normale IN selon IR ($i = r$). Pour un observateur O *quelconque*, le rayon IR semble provenir d'un point A', symétrique de A par rapport à M.

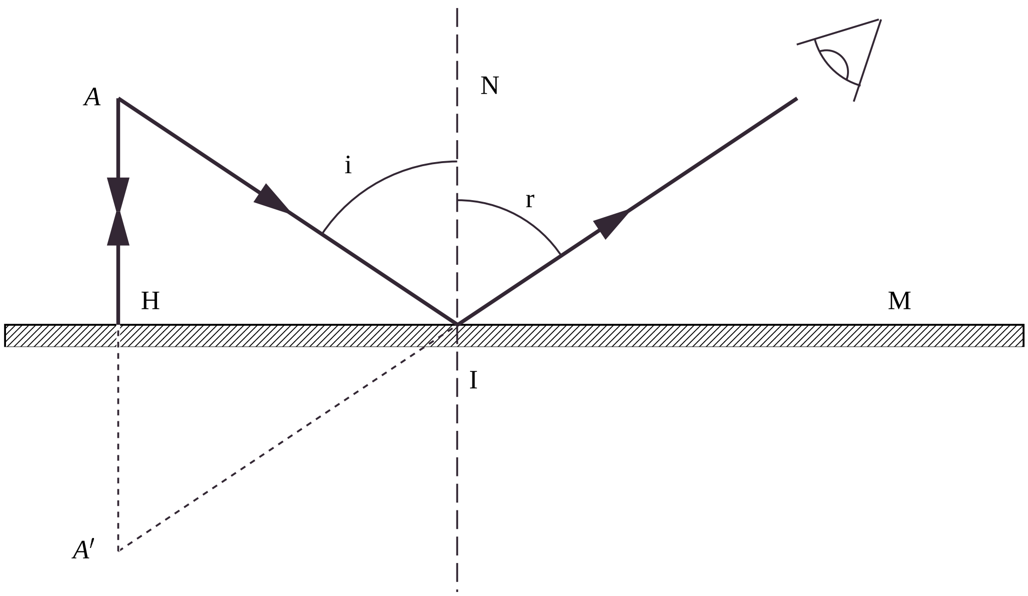


FIG. 11 – Image d'un point dans un miroir.

Propriété. Un miroir plan donne d'un point A une image A' symétrique par rapport au plan du miroir : le miroir plan est dit **stigmatique**, car l'image de tout point de l'espace est un point.

Remarque. C'est le *seul* système optique à posséder cette propriété.

6.2 Images et objets réels et virtuels.

Considérons un objet ponctuel lumineux A (fig.12) face au miroir M : c'est un *objet réel*.

Pour un observateur O, les faisceaux de lumière issus de A semblent en fait provenir de l'image A', or aucune énergie lumineuse n'est émise en A' (pas de signal lumineux détectable en A'). On dit que A' est une *image virtuelle*.

Inversement, considérons un faisceau de lumière *conique* de sommet A (fig13.)

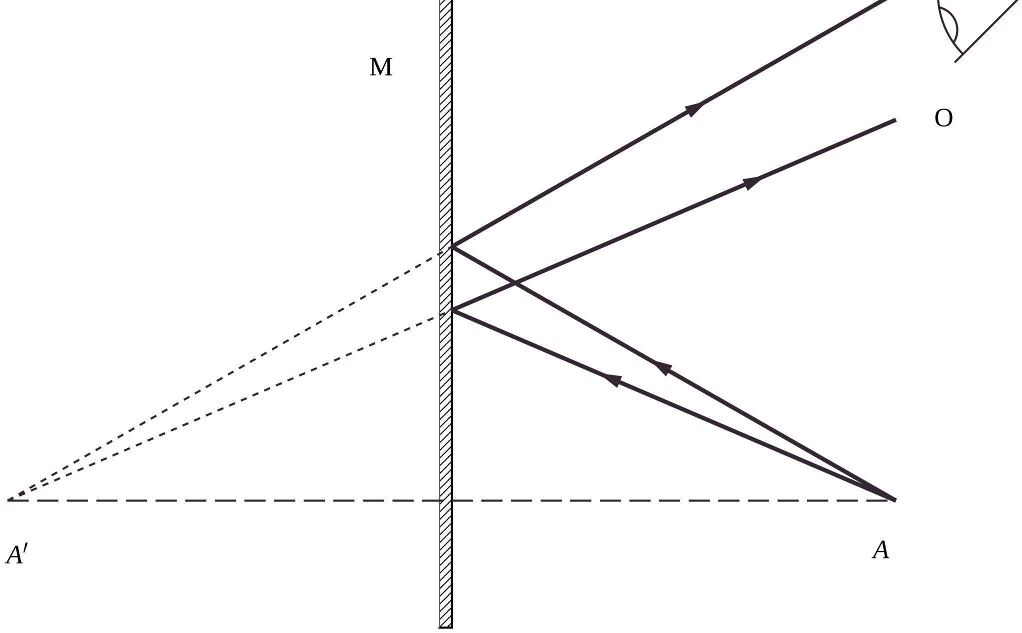


FIG. 12 – Objet réel, image virtuelle.

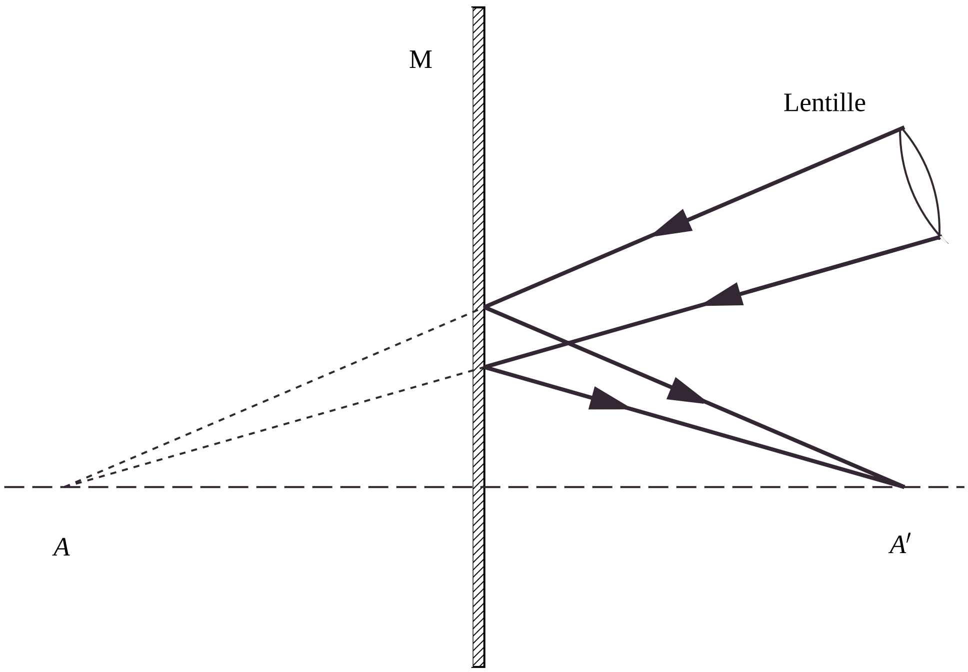


FIG. 13 – Objet virtuel, image réelle.

Interposons un miroir dans le faisceau ; celui-ci est alors dévié, réfléchi de telle sorte qu'il se forme une image lumineuse en A'. Le point A' est une *image réelle* de A car l'énergie lumineuse se concentre réellement en A'. Par contre, aucun signal lumineux n'est détectable en A ; le point A est considéré comme *objet virtuel*.

Conclusions.

a. Dans un miroir plan :

1. Si l'objet est réel, l'image est virtuelle.
2. Si l'objet est virtuel, l'image est réelle.

b. On peut facilement se convaincre que dans un miroir un objet étendu et son image ont effectivement la symétrie ... miroir ! Ils ne sont donc pas superposables (fig.14).

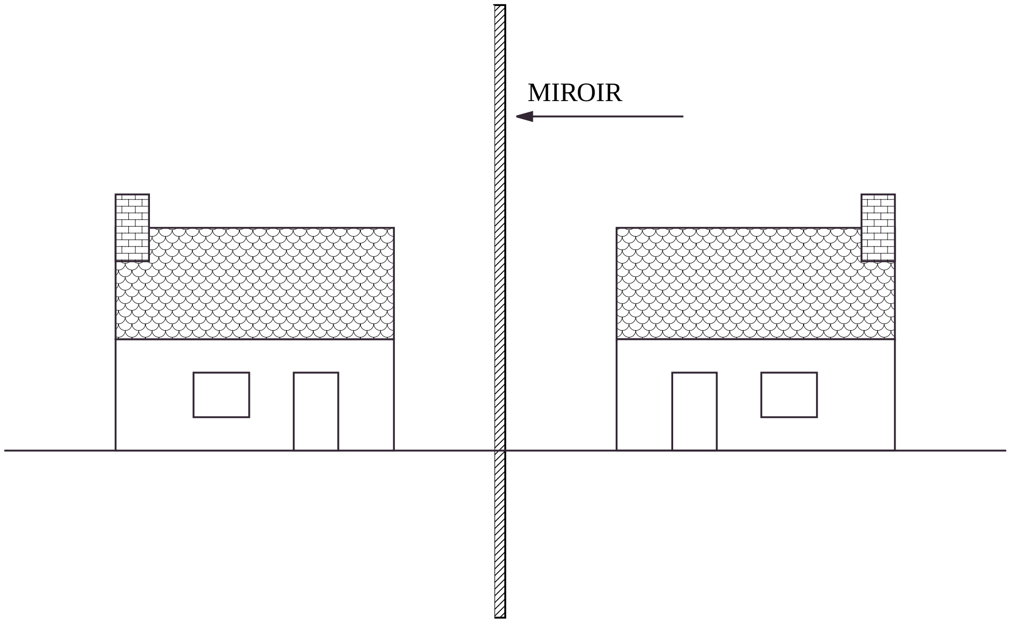


FIG. 14 – Objet "Gauche", image "Droit".

7 Dioptres plans.

Définition. Un *dioptre plan* est constitué de deux milieux transparents, homogènes, d'indices différents, séparés par une surface plane.

7.1 Image d'un point lumineux.

Soit n_1 et n_2 les indices des deux milieux, avec $n_1 > n_2$ par exemple (fig.15). Soit d'autre part un point lumineux objet A dans le milieux 1. Montrons que ce point A **n'a pas d'image**.

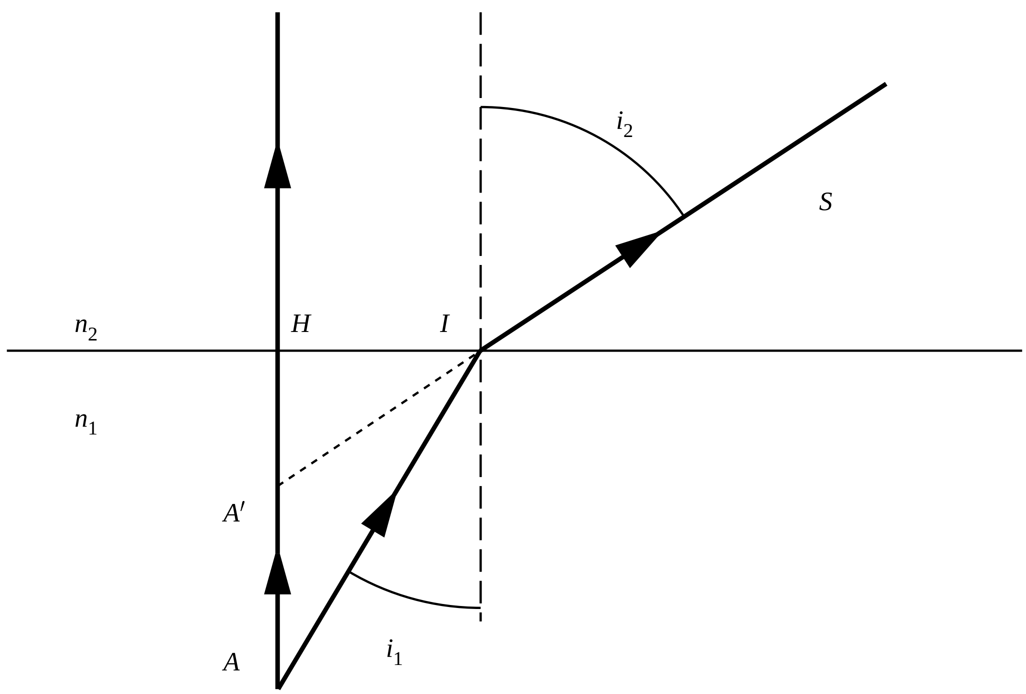


FIG. 15 – Un point n'a pas d'image par réfraction.

L'image de A, si elle existait, serait sur la normale AH d'après les lois de Snell-Descartes. Un second rayon AI issu de A, se réfracte suivant IS. L'image de A, si elle existait, devrait se trouver au point A', intersection de AH et du prolongement de SI. Montrons que la position de A' *dépend* du rayon $A'I$ émis.

Soit i_1 et i_2 les angles d'incidence et de réfraction du rayon AI émis. On a

$$HI = HA \tan i_1$$

et

$$HI = HA' \tan i_2$$

donc

$$HA\tan i_1 = HA'\tan i_2$$

ce qui donne

$$HA' = HA\frac{\tan i_1}{\tan i_2} = HA\frac{\sin i_1}{\sin i_2}\frac{\cos i_2}{\cos i_1}$$

et en utilisant la relation de Snell-Descartes

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

on aura

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

et

$$\frac{\cos i_2}{\cos i_1} = \sqrt{\frac{1-\sin^2 i_2}{1-\sin^2 i_1}} = \sqrt{\frac{1-(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2 i_1}{1-\sin^2 i_1}}$$

soit en reportant

$$HA' = HA\frac{n_2}{n_1}\sqrt{\frac{1-(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2 i_1}{1-\sin^2 i_1}}$$

On voit sur cette expression que :

a. HA' *dépend* de l'angle d'incidence i_1. Ceci implique que l'image d'un point n'est pas unique, ce n'est pas un point ! On voit donc que contrairement au miroir, le dioptre plan *n'est pas un système optique stigmatique* pour un point quelconque de l'espace.

b. HA' est indépendant de i_1 si $HA' = 0$, alors $HA' = 0$ ou bien $HA \to \infty$, et $HA' \to \infty$: Le dioptre plan est stigmatique pour les points de sa surface ou bien pour les points très éloignés.

c. HA' est pratiquement indépendant de i_1 si les quantités $\sin^2 i_1$ et $(\frac{n_1}{n_2})^2\sin^2 i_1$ sont négligeables, donc, lorsque $i_1 \simeq 0$; c'est-à-dire pour des observateurs ne recevant que des *rayons voisins de la normale au plan du dioptre*. Ces conditions constituent un des termes de **l'approximation de Gauss** que nous détaillerons par la suite. En conclusion, le dioptre plan est approximativement stigmatique, seulement dans des conditions particulières.

Vérification expérimentale.

On considère l'expérience décrite sur la figure.16 : un bac transparent rempli d'eau reçoit un faisceau de lumière qu'on dirige grâce à une lentille sur un miroir.

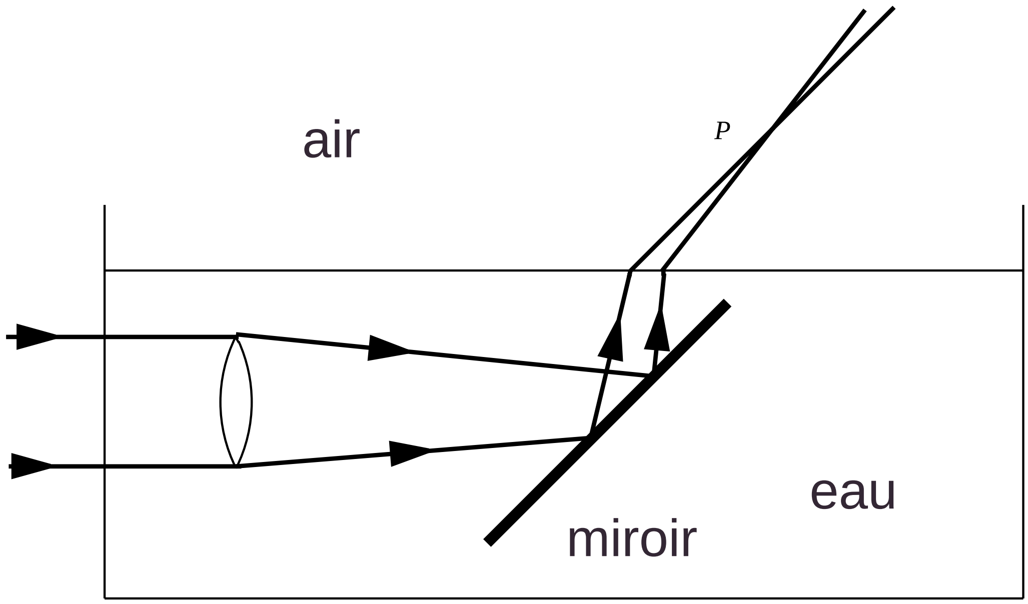


FIG. 16 – Astigmatisme du dioptre plan.

En faisant pivoter le miroir on constate que :

1. Pour des faisceaux proches de la normale à la surface de l'eau, l'image est un point P (stigmatisme).
2. Pour des faisceaux inclinés par rapport à la normale, l'image n'est plus un point, elle devient floue (astigmatisme).
2. Pour une inclinaison donnée par rapport à la normale, l'image est d'autant plus proche d'un point que la largeur du faisceau incident est faible.

7.2 Formules du dioptre plan dans l'approximation stigmatique.

Orientons la verticale au plan issue de H du milieu d'indice n_1 vers le milieu d'indice n_2 (fig.15). Lorsque $\sin^2 i_1$ est négligeable, on peut écrire en *valeurs algébriques*

$$\overline{HA'} = \overline{HA}\frac{n_2}{n_1}$$

soit encore

$$\frac{n_1}{\overline{HA}} - \frac{n_2}{\overline{HA'}} = 0$$

posons, pour les valeurs algèbriques, $p_1 = \overline{HA}$ et $p_2 = \overline{HA'}$. On obtient alors, pour une image donnée A'

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = 0$$

Remarque.1. Pour que cette formule soit vérifiée, il faut que p_1 et p_2 aient le même signe, donc que le point et son image (approchée !) soient situés du même coté de la surface du dioptre plan.

Remarque.2. On remarque aussi qu'ils sont de nature différente : si l'un(e) est réel(le), l'autre est virtuel(le), et réciproquement.

Exercice. Calculer le *facteur de grandissement* $\overline{A'B'}/\overline{AB}$ d'un petit objet linéaire AB parallèle à la surface du dioptre plan. Même question pour le même objet, mais perpendiculaire à la surface.

8 Lames à faces parallèles.

Définition. Une *lame à faces parallèles* est constituée de deux dioptres plans parallèles entre eux.

8.1 Marche d'un rayon lumineux.

Nous nous limiterons au cas $n_2 > n_1$ et $n_2 > n_3$.

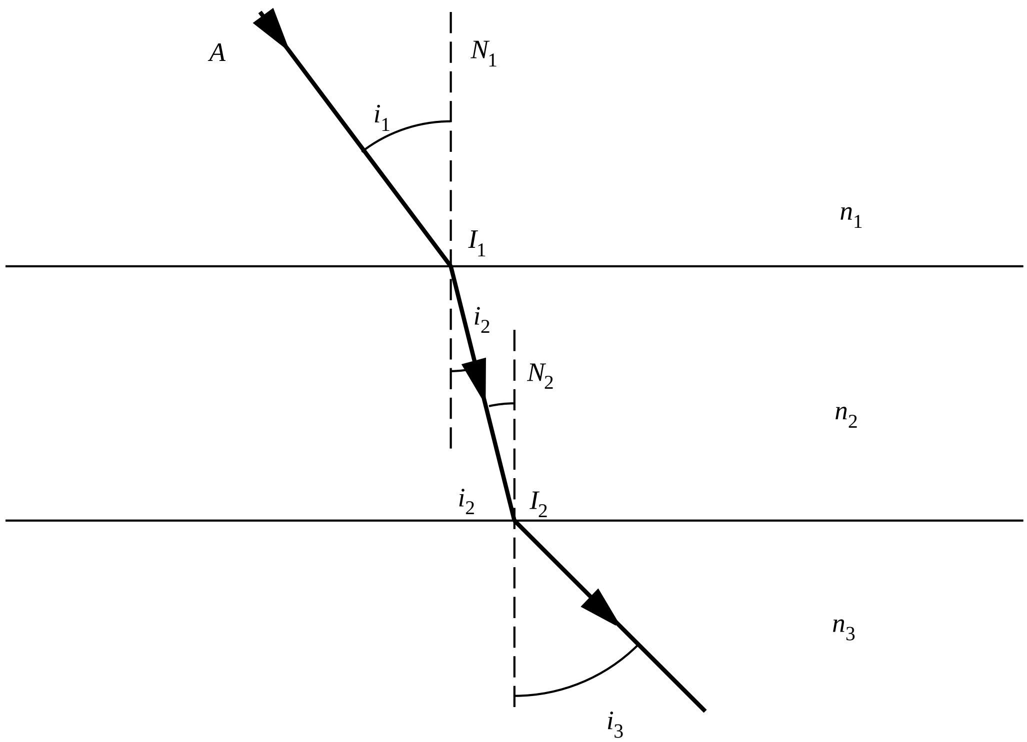


FIG. 17 – Lames à faces parallèles.

Rappelons les relations de Snell-Descartes pour les deux dioptres considérés

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

$$n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3$$

d'où

$$n_1 \sin i_1 = n_3 \sin i_3$$

Conséquences.

1. L'angle i_3 est *indépendant* de n_2 : pour un angle d'incidence donné, l'angle de réfraction du rayon émergent est indépendant de l'indice n_2 de la lame intermédiaire.

2. Lorsque $n_1 = n_3$ alors $i_1 = i_3$, le rayon émergent est *parallèle* au rayon incident. En pratique, cela veut dire que les rayons d'un faisceau incident de rayons parallèles restent parallèles et ressortent parallèlement à la direction des rayons incidents.

8.2 Déplacement latéral dans le cas $n_1 = n_3$.

Soit une lame à faces parallèles d'indice n, d'épaisseur e, placée dans le vide. Un rayon incident AI_1 ressort parallèlement à lui-même. Calculons le déplacement latéral I_1H qu'il subit lors de la traversée de la lame (fig.18).

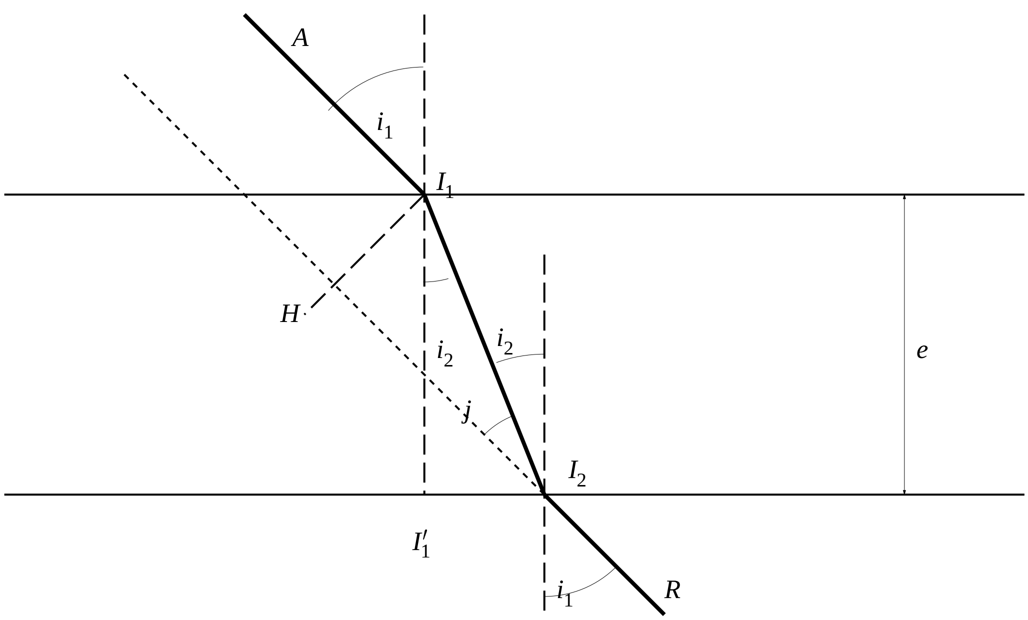


FIG. 18 – Déplacement latéral.

Le triangle I_1HI_2 est rectangle et

$$j = i_1 - i_2$$

$$I_1H = I_1I_2 \sin(i_1 - i_2)$$

D'autre part, dans le triangle $I_1I_1'I_2$ on a

$$I_1I_1' = I_1I_2 \cos i_2 = e$$

d'où

$$I_1I_2 = \frac{e}{\cos i_2}$$

finalement, le déplacement latéral du rayon émergent $\Delta = I_1H$ vaut

$$\Delta = e\frac{\sin(i_1 - i_2)}{\cos i_2}$$

Exercice. Exprimer cette relation en fonction uniquement de i_1 et de n.

Cas particuliers :

a. Rayon normal à la surface

$$i_1 = 0 \Longrightarrow i_2 = 0 \Longrightarrow \Delta = 0$$

b. Rayon rasant

$$i_1 = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \Delta = ?$$

8.3 Image (approchée) d'un point lumineux ($n_1 = n_3$).

Le dioptre plan étant astigmatique, il en est de même pour la lame à faces parallèles. On montre cependant (comme pour le dioptre) qu'il y a stigmatisme approché lorsqu'on ne reçoit du point A qu'un faisceau de rayons étroit et proche de la normale à la lame. *Nous ne considérerons que ce cas*.

Pour calculer la position de A', image approchée du point A, nous considérons deux rayons particuliers issus de A, comme il est indiqué sur la figure 19. Le rayon AH_1 n'est pas dévié. Le rayon AI_1 est déplacé et donne I_2R.

Soit A' le point d'intersection de I_2R avecAH_1. Calculons AA'. On a

$$AA' = I_1J = KI_1 - KJ$$

Or J n'est autre que l'image du point I_1 dans le dioptre supérieur, et on sait que

$$KJ = \frac{1}{n}KI_1$$

d'où

$$AA' = KI_1 - \frac{1}{n}KI_1$$

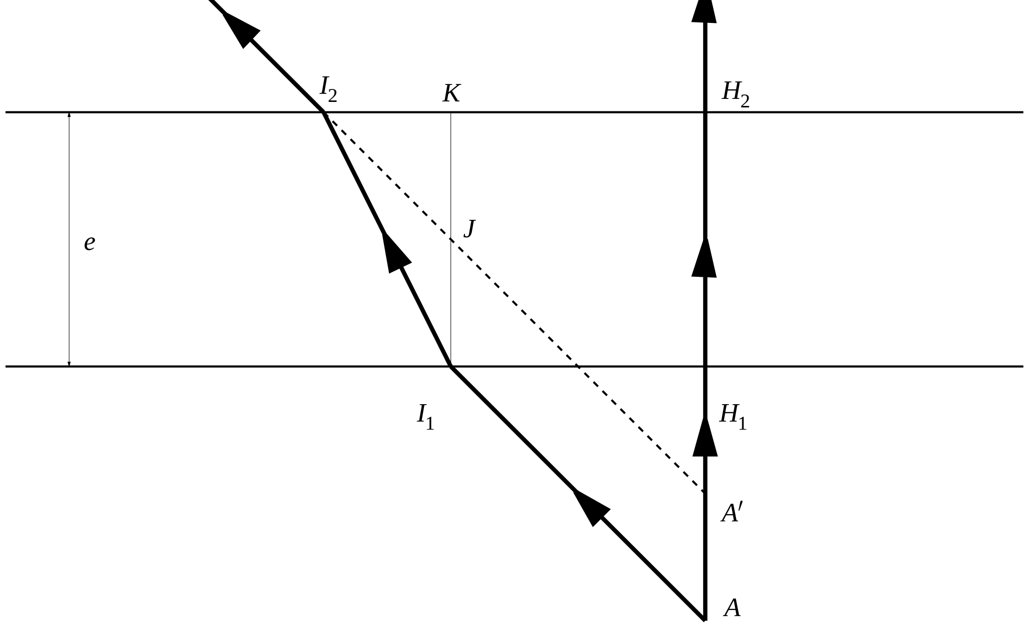


FIG. 19 – Image d'un point à travers un dioptre.

Et finalement la distance objet image

$$AA' = e(1 - \frac{1}{n})$$

Conclusions. Dans les conditions de stigmatisme approché on a

a. La distance objet-image est indépendante de la distance du point A à la lame.

b. À un objet réel correspond une image virtuelle et réciproquement (faire la construction dans ce dernier cas).

Exercice. Calculer le déplacement d'un point A vu à travers une vitre d'indice $n = 1,5$ et d'épaisseur 3mm. Est-ce décelable à l'œil nu ?

9 Prisme.

En optique, un **prisme** est constitué par un milieu transparent limité par deux surfaces planes *non-parallèles*.

Définitions.

1. Les *faces* du prisme sont les deux surfaces planes précédentes.
2. L'*arête* du prisme est l'intersection des deux faces du prisme.
3. Une *section principale* est l'intersection du prisme par un plan perpendiculaire à l'arête du prisme.
4. L'*angle* du prisme est l'angle au sommet de la section principale.

Nous supposerons ici que l'indice de la matière constituant le prisme est supérieur à celui du milieu dans lequel baigne le prisme.

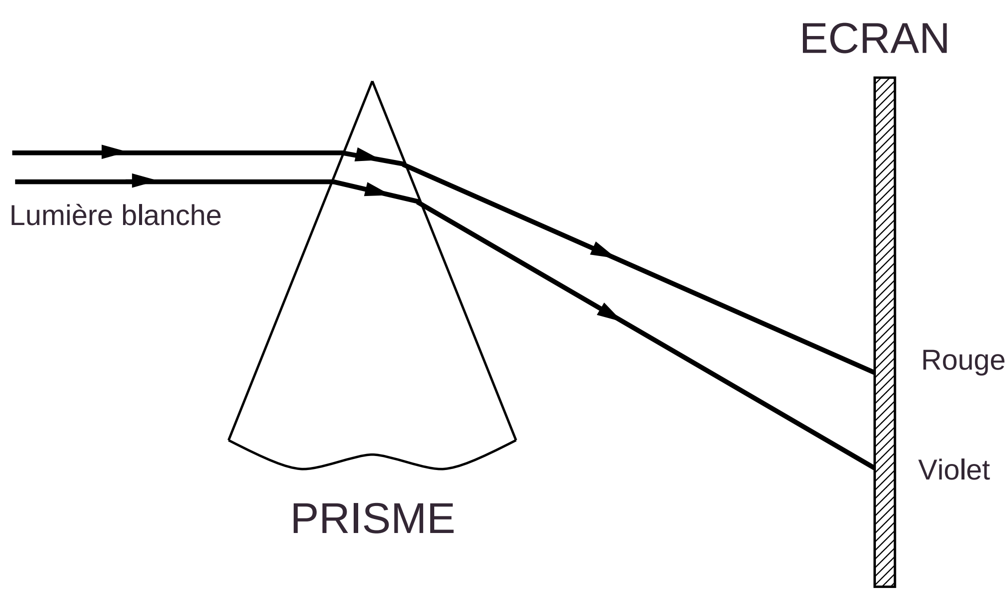


FIG. 20 – Dispersion du prisme.

Propriétés physiques. Le prisme *décompose* la lumière blanche. Il y a *dispersion* de la lumière par le prisme et la dispersion est d'autant plus importante que la longueur d'onde de la lumière incidente est courte.

Conditions d'utilisation du prisme dans ce cours :

1. La lumière est monochromatique (constituée d'une seule longueur d'onde).
2. Chaque rayon incident est dans un plan de section principale (et y reste après réfraction).

9.1 Marche d'un rayon lumineux.

Nous considérons un prisme d'indice n plongé dans l'air d'indice pris égal à 1. Nous supposerons en outre qu'il existe un rayon émergent $I'R$ donc que $r' < i_L$, où i_L est l'angle limite correspondant à la séparation milieu/air considéré (fig.21).

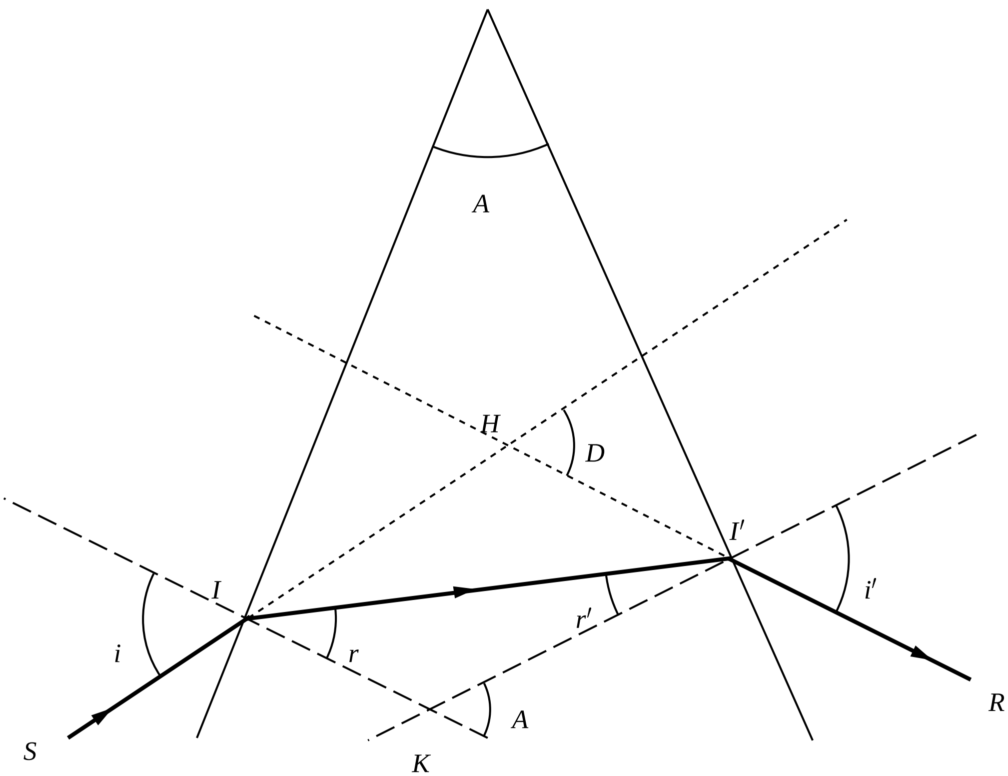


FIG. 21 – Marche d'un rayon lumineux dans le prisme.

Écrivons les relations de Snell-Descartes

$$\sin i = n \sin r \qquad \sin i' = n \sin r'$$

L'angle entre les deux normales aux faces du prisme passant par I et I' est égal à l'angle A du prisme. D'autre part on a dans le triangle $II'K$

$$r + r' = A$$

Désignons par D la déviation du rayon émergent $I'R$ par rapport au rayon incident SI. On a dans le triangle HII'

$$\widehat{HII'} = i - r \qquad \widehat{HI'I} = i' - r'$$

$$D = \widehat{HII'} + \widehat{HI'I}$$

donc

$$D = (i - r) + (i' - r') = (i + i') - (r + r')$$

et finalement

$$D = i + i' - A$$

En résumé, les quatre formules fondamentales du prisme sont les suivantes

$$\sin i = n \sin r \qquad \sin i' = n \sin r'$$

$$A = r + r' \qquad D = i + i' - A$$

CONVENTION de SIGNE. Les formules précédentes ont été établies dans un cas particulier. On démontre qu'elles sont toujours valables , lorsqu'il y a émergence du rayon, **à condition de considérer les angles** $i, \quad r, \quad i', \quad r'$ **comme positifs dans le cas de figure considéré et négatifs lorsque le rayon change de côté par rapport aux normales.** L'angle A du prisme étant pris positif on peut voir que la déviation D est alors toujours **positive**.

9.2 Conditions d'émergences.

On supposera toujours que le rayon lumineux ne rencontre pas la base du prisme. La condition nécessaire et suffisante d'émergence du rayon au travers du prisme est que le rayon II' attaque la face de sortie sous un angle par rapport à la normale

$$r' < i_L$$

où i_L est l'angle limite défini par $\sin i_L = \frac{1}{n}$.

Théorème 1. Pour qu'un rayon sorte du prisme , il faut et il suffit qu'il arrive sur le prisme sous un angle i *supérieur* à l'angle i_0 défini par

$$\sin i_0 = n \sin(A - i_L)$$

Théorème 2. Une condition *nécessaire* (mais pas suffisante !) d'émergence du rayon est

$$A \leq 2 i_L$$

On a en fait (Voir le polycopié des T.P.) :

a. Pour $A > 2i_L$, aucun rayon ne sort.

b. Pour $A \leq 2i_L$, on a deux cas (figure.22).

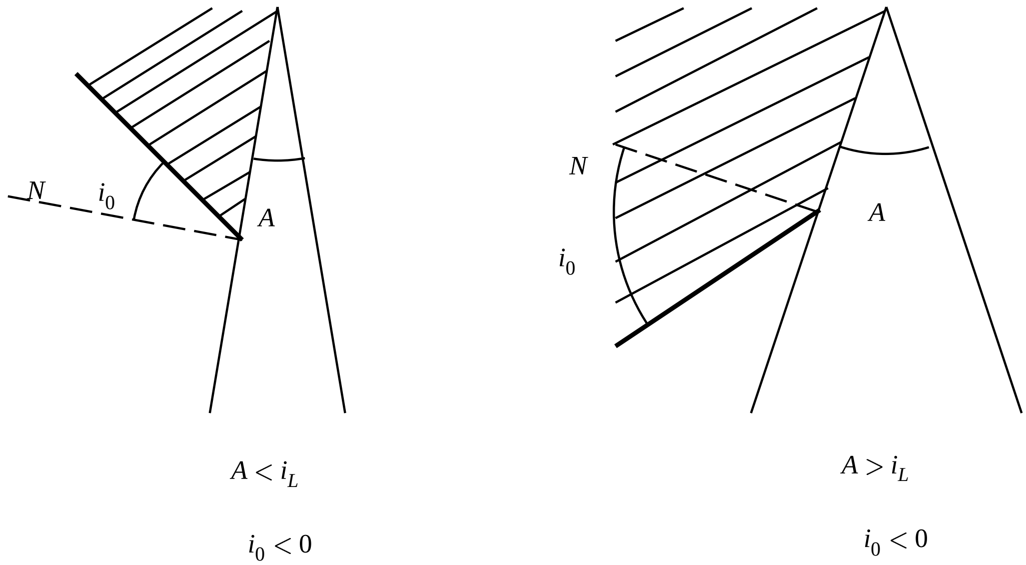


FIG. 22 – Condition nécessaire d'émergence.

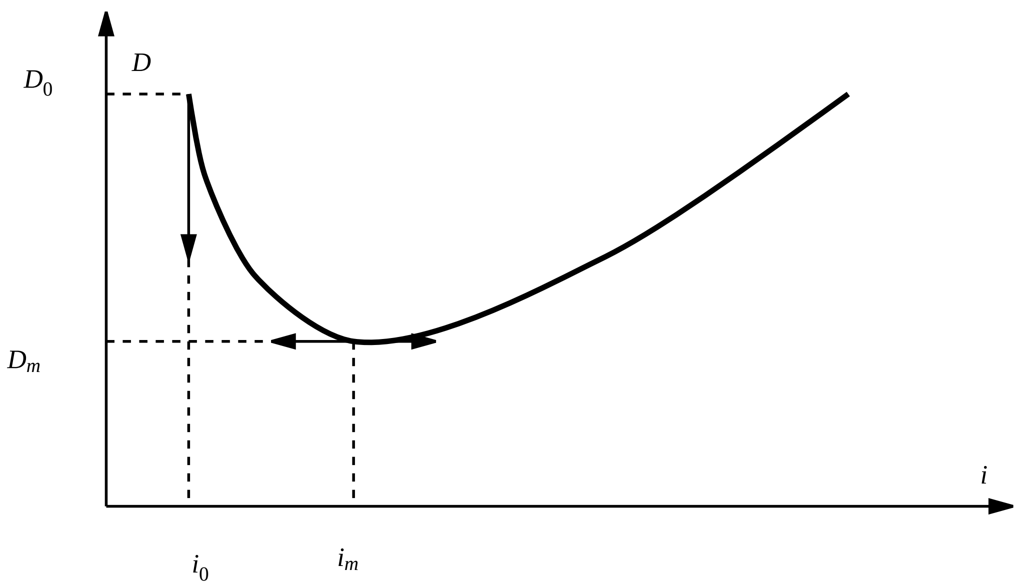


FIG. 23 – Variation de la déviation D.

Variation de D en fonction de i. L'étude de la variation de la déviation D du rayon émergent en fonction de l'angle d'incidence i du rayon incident est étudiée en T.P. L'allure de la courbe expérimentale est indiquée sur la figure 23. Il est recommandé de reporter sur cette figure les valeurs effectivement mesurées. On montre que D passe toujours par

une valeur minimum D_m qui est telle que

$$n\sin\frac{A}{2} = \sin(\frac{A+D_m}{2})$$

9.3 Cas des petits angles.

Ce cas correspond à des angles d'incidence i et de réfraction r' petits, c'est-à-dire à des rayons lumineux proches de la normale. L'angle au sommet A du prisme doit , par conséquent, être lui aussi petit. Les relations du prisme se réduisent alors à

$$i = nr, \qquad i' = nr'$$

et à

$$A = r + r'$$

A est donc petit et on a

$$D = i + i' - A = nr + nr' - A = n(r + r') - A = nA - A$$

et D qui est aussi petit vaut

$$D = (n-1)A$$

Propriété. À l'approximation des petits angles, la déviation D est *indépendante* de l'angle d'incidence i.

Troisième partie

CONDITIONS de GAUSS

Nous précisons dans ce chapitre les conditions nécessaires à l'obtention d'images correctes dans les systèmes optiques que nous étudions. Certaines de ces conditions ont été évoquées à propos des systèmes planaires : les miroirs, qui sont toujours stigmatiques, et dioptres qui ne peuvent être stigmatiques que d'une manière approchée.

10 **Définition.**

1. Un *système optique* est un ensemble de milieux transparents isotropes ou réflecteurs. En pratique, les surfaces de séparation seront toujours des formes géométriques simple (plans, sphères..).
2. Un système optique est dit *centré* si les différentes surfaces de séparation entre les milieux sont des surfaces de révolution autour d'un même axe : l'*axe du système.*

11 Image d'un point lumineux.

Définition. Un *point lumineux* est un objet lumineux vu par l'œil humain sous un angle suffisamment petit pour que sa surface apparente soit considérée comme négligeable, soit un angle de vision inférieur à 1 minute d'arc.

Plaçons un point lumineux A devant un système optique. Un faisceau conique divergent est reçu par le système optique centré sur sa face d'entrée.

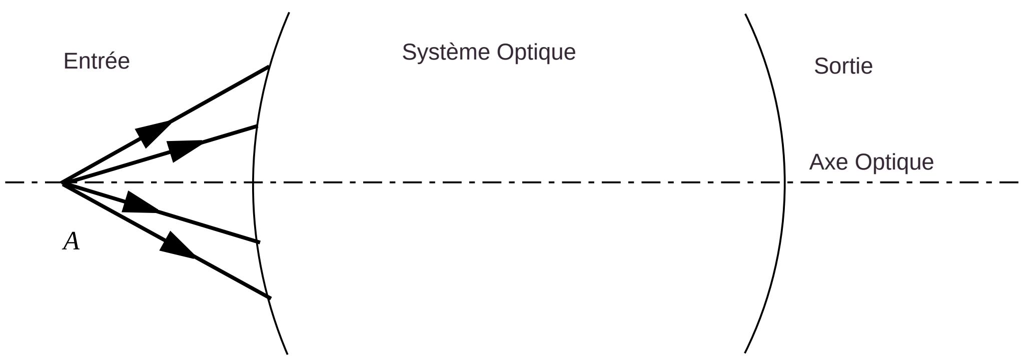


FIG. 24 – Faisceau entrant dans un système optique.

À la sortie, la nature du faisceau dépend du système optique considéré et de la position du point A par rapport à ce système. Trois situations doivent être envisagées.

1. Le *faisceau émergent* est un faisceau conique de sommet A'. Tous les rayons issus de A passant par le système optique arrivent pratiquement en un point A'. Le point A' est alors l'image du point A et le système optique est dit *stigmatique* pour les points A et A'.

   a. Si le faisceau conique est convergent, tous les rayons se concentrent en A' : l'image A' est une **image réelle.** ATTENTION ! Cette situation peut être dangereuse soit pour votre œil, soit pour l'appareil optique lui-même : une quantité importante d'énergie lumineuse peut se concentrer en A'.

   b. Si le faisceau conique est divergent, tous les rayons semblent provenir de A' : l'image A' est une **image virtuelle**. Aucune énergie lumineuse ne se concentre en A'.

   Les deux situations sont représentées sur la figure 25.

2. Les rayons lumineux émergents, dans le cas d'une image réelle (ou leurs prolongements, dans le cas virtuel) passent tous au *voisinage* d'un point A'. Dans le cas ou A' est réel, on n'observe qu'une tache lumineuse, image "floue" du point A. Nous dirons qu'il y a stigmatisme approché pour A et A' si la tache est très petite.

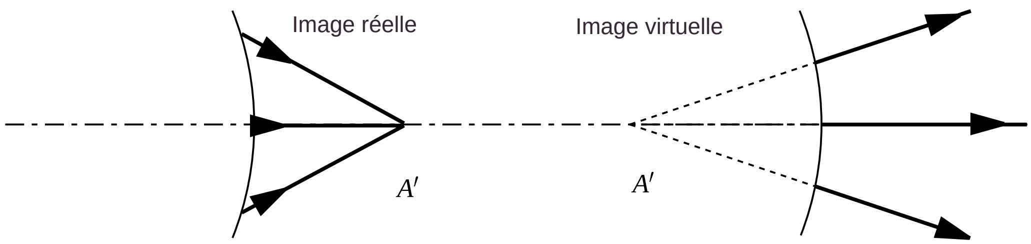


FIG. 25 – Image réelle, image virtuelle.

3. Dans le cas où il n'y a ni stigmatisme rigoureux ni stigmatisme approché, il n'y plus d'image de A, mais on constate que les rayons issus de A sortent du système selon des rayons tous tangents à une même surface. Cette surface s'appelle une *caustique*.

Expérience. Éclairez un rond de serviette bien poli par une source lumineuse ponctuelle. Si le rond de serviette repose sur une feuille blanche, la trace de la caustique sur la feuille se voit sous la forme d'une courbe plus lumineuse que le reste.

Seul le miroir plan est pourvu d'un stigmatisme rigoureux pour tous les points de l'espace. Les appareils d'optique travaillent donc toujours dans des conditions de stigmatisme approché : l'image d'un objet donné n'est jamais parfaite. Il est donc nécessaire de donner les conditions dans lesquelles les images sont les meilleures, ce sont les **conditions de Gauss**.

Définition. On dit qu'un système optique est utilisé dans les conditions de l'approximation de Gauss lorsque sont réalisées les conditions suivantes :

1. Chaque point lumineux n'envoie effectivement dans le système qu'un pinceau lumineux dont les rayons ne s'écartent que *très faiblement* de la normale à chaque surface rencontrée à l'intérieur du système optique considéré.

2. L'objet est *plan (ou rectiligne), perpendiculaire* à l'axe du système et suffisamment *petit* pour que l'image puisse être aussi considérée comme plane (ou rectiligne).

Remarque. Lorsque les conditions de Gauss ne sont pas réalisées les "images" obtenues, au lieu d'être proportionnelles à l'objet, sont déformées : le système produit dans ce cas des *aberrations géométriques*. Le calcul de ces aberrations est extrêmement difficile, même si au cours de ces dernières décennies des méthodes puissantes de la physique mathématique, (théorie de Lie) ont été utilisées avec un certain succès.

Quatrième partie

LE DIOPTRE SPHÉRIQUE

12 Définitions.

1. Un *dioptre sphérique* est constitué par deux milieux transparents homogènes et isotropes d'indices n_1 et n_2 différents, séparés par une surface sphérique de *rayon de courbure* $|R| > 0$.

2. Nous nous limiterons ici aux surfaces sphériques qui sont des *calottes sphériques* de centre C et de sommet S, l'*axe principal* du dioptre passant par les points C et S.

13 Conventions.

Il y a quatre cas de figure possibles selon l'orientation de l'axe principal et les valeurs respectives des indices n_1 et n_2 (figure.26).

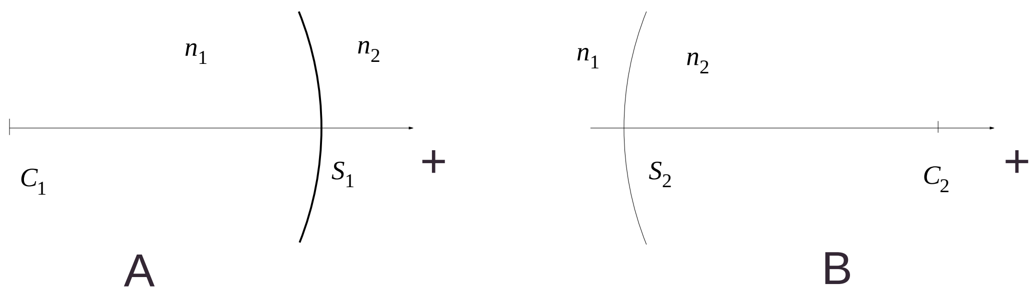


FIG. 26 – Cas A : $n_1 > n_2$ ou $n_1 < n_2$ et cas B : $n_1 > n_2$ ou $n_1 < n_2$.

On remarquera que dans les deux cas A on a en valeur algébrique $\overline{C_1S_1} > 0$ et dans les deux cas B on a par contre $\overline{C_2S_2} < 0$.

On peut montrer que le dioptre sphérique n'est pas stigmatique pour des points quelconques de l'espace, pour ces raisons, nous travaillerons systématiquement à l'approximation de Gauss comme nous l'avons annoncé précédemment.

14 Relations fondamentales du dioptre sphérique.

Considérons le cas particulier où $n_1 > n_2$ et $\overline{CS} > 0$ et A_1 un point lumineux situé sur l'axe optique comme indiqué sur la figure 27.

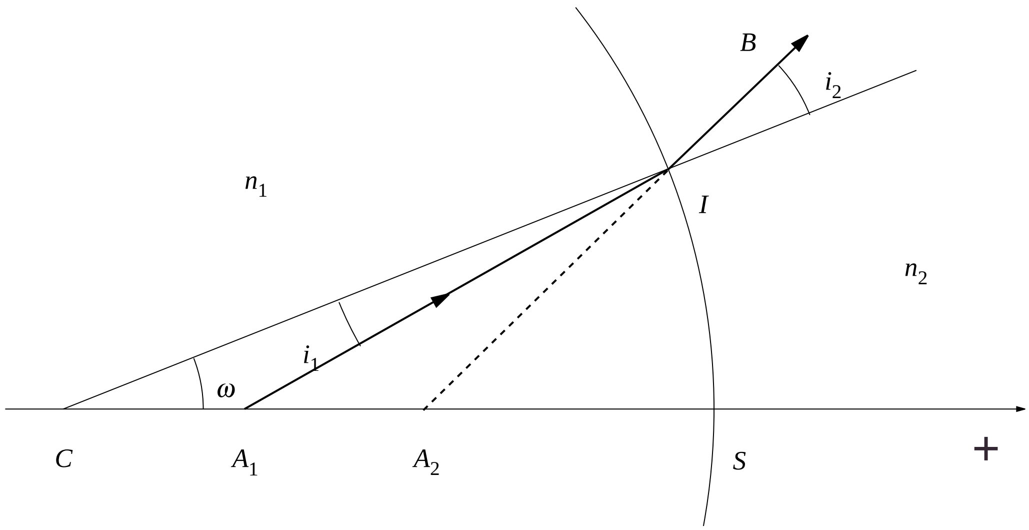


FIG. 27 – Trajet d'un rayon dans un dioptre sphérique.

À l'approximation de Gauss, le rayon incident A_1I doit être proche de la perpendiculaire au cercle de centre C et de rayon $CI = R$. Il en résulte que l'angle i_1 est très petit et qu'il n'y a pas de réflexion totale en I lors du passage du rayon du milieu 1 vers le milieu 2. Si i_1 est très petit, il en est de même pour i_2. Le rayon réfracté IB coupe l'axe principal en A_2 ; si A_1 est réel, A_2 est virtuel. Appliquons la relation des sinus aux deux triangles CA_1I et CA_2I,(on a posé $\omega = \widehat{SCI}$).

$$\frac{CA_1}{\sin i_1} = \frac{IA_1}{\sin\omega}$$

$$\frac{CA_2}{\sin i_2} = \frac{IA_2}{\sin\omega}$$

d'où la relation.(On a supposé que ω est différent de 0)

$$\frac{\sin i_1}{CA_2}\frac{\sin i_2}{CA_1} = \frac{IA_2}{IA_1}$$

La relation de Snell-Descartes nous donne par ailleurs

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

On obtient donc

$$\frac{n_2}{n_1}\frac{CA_2}{CA_1} = \frac{IA_2}{IA_1}$$

soit finalement

$$n_2\frac{CA_2}{IA_2} = n_1\frac{CA_1}{IA_1}$$

Remarquons que cette relation est indépendante de la condition de Gauss : *elle est la même pour tout rayon lumineux*, on l'appelle la **relation fondamentale du dioptre sphérique**. Nous l'avons établie dans un des quatre cas possible, on peut montrer que c'est la même dans les autres cas.

Dans l'**approximation de Gauss**, que nous considérons ici, le point I est toujours voisin de S, on peut donc admettre que $IA_2 \simeq SA_2$ et $IA_1 \simeq SA_1$. La relation fondamentale du dioptre sphérique s'écrit alors

$$\frac{n_2}{n_1}\frac{CA_2}{CA_1} = \frac{SA_2}{SA_1}$$

les points A_1, A_2, S et C sont maintenant *alignés*, sur l'axe principal du dioptre que nous avons *orienté*. On peut alors se convaincre que la relation fondamentale est aussi vraie pour les *valeurs algébriques* $\overline{CA_1}$, $\overline{CA_2}$, $\overline{SA_1}$ et $\overline{SA_2}$ mesurées sur l'axe principal orienté. Soit

$$\frac{n_2}{n_1}\frac{\overline{CA_2}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA_1}}$$

On vérifie que cette relation reste valable pour les quatre cas de figure possibles.

En vue de l'application du dioptre sphérique aux lentilles il est commode de choisir le sommet S du dioptre comme *origine* des valeurs algèbriques des longueurs mesurées sur l'axe principal (et seulement celles-là). Posons pour simplifier $p_1 = \overline{SA_1}$, $p_2 = \overline{SA_2}$ et en remarquant que $\overline{SC} = R$ (toutes ces quantités peuvent être négatives ou positives !) ; on a

$$\overline{CA_2} = \overline{CS} + \overline{SA_2} = p_2 - R$$

$$\overline{CA_1} = \overline{CS} + \overline{SA_1} = p_1 - R$$

La relation fondamentale du dioptre sphérique s'écrit donc à l'approximation de Gauss.

$$\frac{n_2}{n_1}\frac{p_2 - R}{p_1 - R} = \frac{p_2}{p_1}$$

soit en supposant p_1, p_2 et R différents de 0

$$\frac{n_1}{p_1} - \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_1}{R} - \frac{n_2}{R}$$

15 Exercices et remarques.

1. Déterminer le rayon réfracté d'un rayon passant par le centre C du dioptre.
2. Montrer que tous les rayons parallèles à l'axe principal sont réfractés de telle sorte qu'ils passent par le même point F' situé sur cet axe à l'abscisse

$$p_2(F') = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}$$

   Le point F' s'appelle le **foyer image** du dioptre sphérique. Discuter la nature virtuelle ou réelle de F' selon les quatre cas de figure.
3. Montrer que tout rayon lumineux passant par le point F situé sur l'axe principal à l'abscisse

$$p_1(F) = \frac{n_1 R}{n_1 - n_2}$$

   est réfracté parallèlement à cet axe. Le point F s'appelle le **foyer objet** du dioptre. Discuter la nature virtuelle ou réelle de F selon les quatre cas de figure.
4. Connaissant la position des foyers F et F' du dioptre, construire en utilisant les rayons considérés en [2.] et [3.], l'image $A'B'$ d'un petit objet AB perpendiculaire à l'axe principal.

Remarque. Les quantités $f = p_1(F)$ et $f' = p_1(F')$ sont appelées **distances focales** du dioptre sphérique et on a

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n_1}{n_2}$$

Vergence. La quantité suivante

$$D = \frac{n_2}{f'} = -\frac{n_1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

s'appelle la **vergence** du dioptre, elle a la dimension de l'inverse d'une longueur et s'exprime en **dioptries** si R est exprimé en mètres.

Cinquième partie

LENTILLES MINCES

16 Définitions.

1. Une *lentille* est un milieu transparent ($n > 1$) limité principalement par deux dioptres sphériques ou un dioptre plan et un dioptre sphérique.

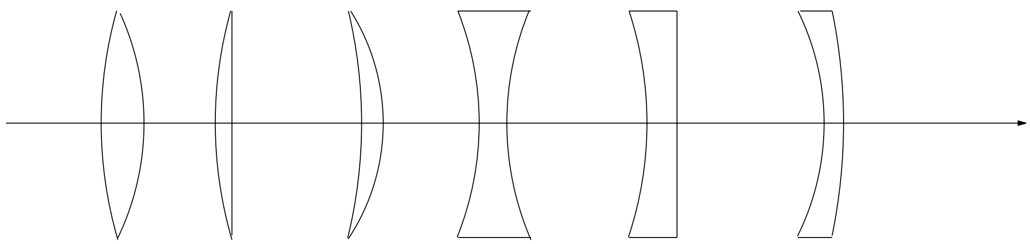


FIG. 28 – Types de lentilles.

2. La droite qui joint les centres des deux dioptres sphériques s'appelle l'*axe principal* ou *axe optique*. Lorsque l'une des faces est un dioptre plan, l'axe est la droite passant par le centre du dioptre sphérique et perpendiculaire au dioptre plan.

3. Les *rayons de courbure* de la lentille sont les rayons de courbure $|R_1|$ et $|R_2|$ des deux dioptres sphériques. Lorsque l'une des faces est plane, son rayon de courbure est pris par convention égal à ∞.

Remarque. Les rayons de courbure sont comptés *algébriquement* sur l'axe principal que nous avons orienté. Par exemple, si S_1 et S_2 sont les sommets des dioptres et C_1 et C_2 leurs centres respectifs, les quantités $\overline{S_1C_1} = R_1$ et $\overline{S_2C_1} = R_2$ sont négatives ou positives selon qu'elles sont orientées contrairement ou dans le même sens que l'axe optique.

17 Lentilles minces.

Une lentille est une *lentille mince* lorsque son épaisseur au sommet S_1S_2 est *très petite* par rapport aux deux rayons $|R_1|$, $|R_1|$ et leur différence

Exemples.

a. $S_1S_2 = 1$ mm, $R_1 = 1$ m, $R_2 = -1$m, c'est-à-dire que $|R_1 - R_2| = 2$m,

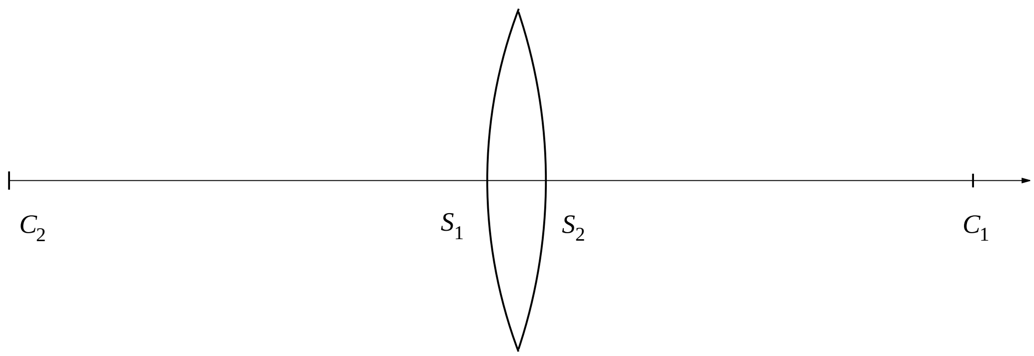


FIG. 29 – Lentille mince.

est une lentille mince. En effet, S_1S_2/R_1, S_1S_2/R_2 et $S_1S_2/|R_1 - R_2|$ sont de l'ordre du millième.

b. $S_1S_2 = 1$mm, $R_1 = R_2 = 1$m, *n'est pas* une lentille mince car $|R_1 - R_2| = 0$!



FIG. 30 – Lentille épaisse !

18 Bords des lentilles minces.

a. Lorsque le bord de la lentille est moins épais que S_1S_2, on dit que la lentille est à *bord mince*.

b. Lorsque le bord de la lentille est plus épais que S_1S_2, on dit que la lentille est à *bord épais*.

On a les représentations graphiques des deux lentilles sur la figure 31.

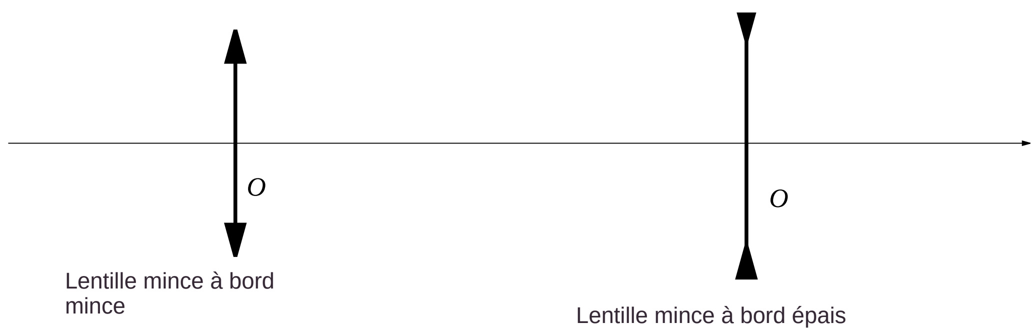


FIG. 31 – Les deux types de lentille mince.

Dans cette représentation graphique, on confond les points S_1 et S_2, qu'on dénote par O et qu'on appelle le *centre optique* de la lentille. Nous omettrons désormais le qualificatif "mince" : toutes nos lentilles serons ici des lentilles minces et nous nous situerons dans les conditions de Gauss.

19 Lentilles convergentes, lentilles divergentes

Si nous réalisons l'expérience d'envoyer un faisceau de lumière cylindrique sur une lentille parallèlement à l'axe optique , nous observons les deux cas suivants (figure 32.)

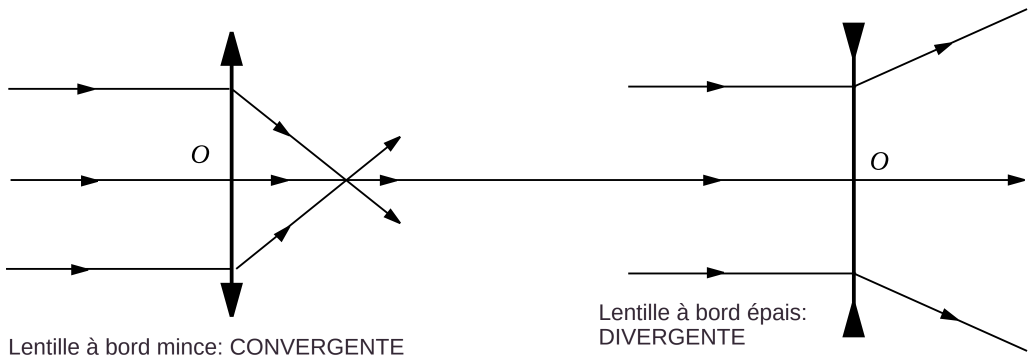


FIG. 32 – Lentille convergente, Lentille divergente.

Remarque. En principe, lorsqu'on travaille dans les conditions de Gauss, le faisceau émergent semble converger (ou diverger) en *un point*. Il est facile, en inclinant de plus en plus l'axe principal de la lentille par rapport à celui du faisceau d'observer la perte du stigmatisme. On peut même observer, pour de grandes inclinaisons la surface caustique qui remplace alors l'image réelle.

20 Position de l'image.

Considérons (fig.33) le cas d'une lentille convergente par exemple (le cas divergent est tout à fait semblable). Soient S_1 et S_2 les sommets respectifs de ses deux dioptres constituants que nous considèreront comme confondus avec le centre optique O de la lentille. Un petit objet lumineux AB est situé en A, perpendiculairement à l'axe optique.

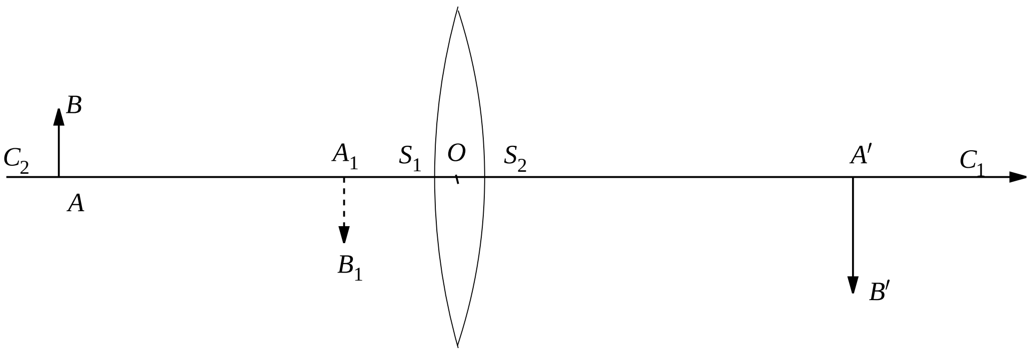


FIG. 33 – Principe de la formation d'une image dans dans une lentille.

Le premier dioptre de sommet $S_1 \simeq O$ donne une image A_1B_1 de AB. Pour le second dioptre de sommet $S_2 \simeq O$, A_1B_1 joue le rôle d'un objet (éventuellement virtuel) dont l'image finale (réelle ou virtuelle) est $A'B'$.

Dénotons les valeurs algèbriques par $p = \overline{OA}$, $p_1 = \overline{OA_1}$, $p' = \overline{OA'}$. Les rayons de courbure des deux dioptres étant respectivement égaux à $|R_1|$ et $|R_2|$, on a $\overline{OC_1} = R_1$ et $\overline{OC_2} = R_2$ qui est négatif dans le cas de figure considéré. Les formules du dioptre sphérique donnent respectivement pour chaque dioptre

$$\frac{1}{p} - \frac{n}{p_1} = \frac{1}{R_1} - \frac{n}{R_1}$$

$$\frac{n}{p_1} - \frac{1}{p'} = \frac{n}{R_2} - \frac{1}{R_2}$$

Additionnons les deux membres et changeons de signe

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

C'est la *formule fondamentale* des lentilles minces.

21 Points particuliers de l'axe optique.

Nous étudions maintenant des points particuliers de l'axe optique, caractéristiques d'une lentille donnée.

I. Le foyer image : C'est le point F' de l'axe optique, image d'un point situé à l'infini $(p = -\infty)$; son abscisse $f' = p'(F')$ s'appelle la *distance focale image*. La formule fondamentale des lentilles nous donne

$$\frac{1}{f'} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

1. Le *foyer image* d'une lentille convergente est un point réel situé du côté de la lentille qui ne contient pas la source.

2. Le *foyer image* d'une lentille divergente est un point virtuel situé du côté de la lentille qui contient la source.

II. Le foyer objet : C'est le point F de l'axe optique dont l'image F'' est à l'infini $(p'(F'') \to \infty)$. Son abscisse $f = p(F)$, s'appelle la *distance focale objet*. La formule fondamentale des lentilles nous donne alors

$$-\frac{1}{f} = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$$

On voit donc que

$$f' = -f$$

C'est à dire que les distances focales image et objet sont opposées : *Les deux foyers d'une lentille mince sont symétriques par rapport à la lentille*.

III. Le centre optique : C'est le point O où la lentille rencontre l'axe optique et il possède la propriété que *tout rayon rayon qui passe par le centre optique n'est pas dévié*. Ceci peut se comprendre par le fait qu'au voisinage des points sommets S_1 et S_2 des deux dioptres, la lentille est pratiquement une lame à faces parallèles de très faibles épaisseur et par conséquent ne déviant pratiquement pas les rayons incidents passant au voisinage de ces points.

Donnons un résumé géométrique des points caractéristiques des lentilles que nous avons introduits.

a. Foyers réels = Lentille convergente.

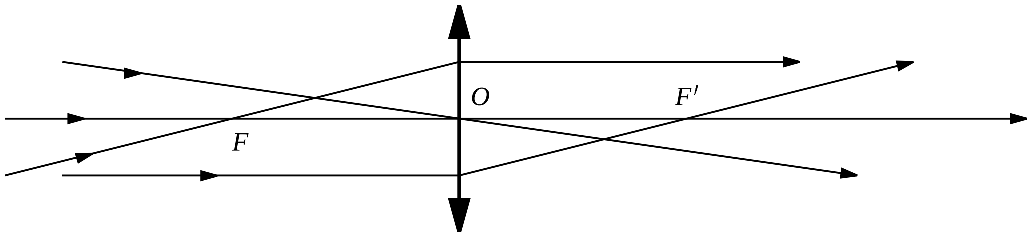


FIG. 34 – Lentille convergente.

b. Foyers virtuels = Lentille divergente.

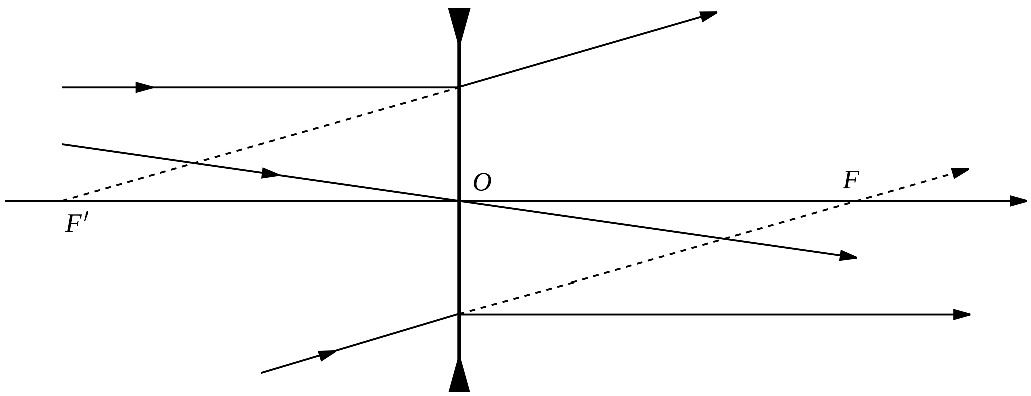


FIG. 35 – Lentille divergente.

Rappelons la formule fondamentale des distances focales $f = \overline{OF}$ et $f' = \overline{OF'}$

$$f = -f' = \frac{R_1 R_2}{(n-1)(R_1 - R_2)}$$

22 Construction de l'image d'un petit objet AB.

Le type d'image obtenue dépend du type de la lentille (convergente ou divergente) mais aussi de la position relative de l'objet par rapport aux points F, F' et O. Nous allons donner la construction de l'image dans le cas d'un *objet réel*, la construction se fait d'une façon tout a fait analogue dans le cas d'un objet virtuel (Voir l'exercice).

I. Lentille convergente.

a. L'objet AB est compris entre $-\infty$ et le foyer F (voir figure 36.).

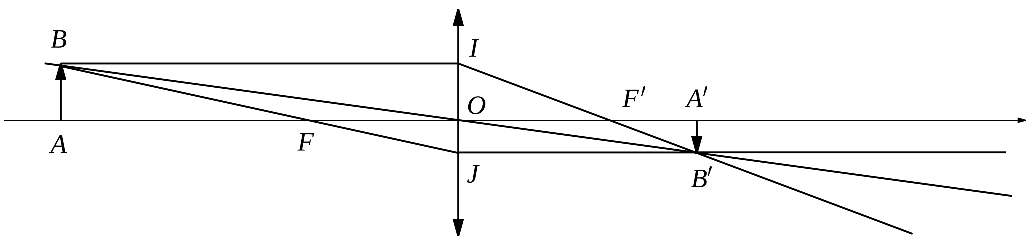


FIG. 36 – Lentille convergente : Cas a.

L'image $A'B'$ est **réelle et renversée** par rapport à l'objet.

b. L'objet AB est compris entre le foyer F et le centre O (voir figure 37.).

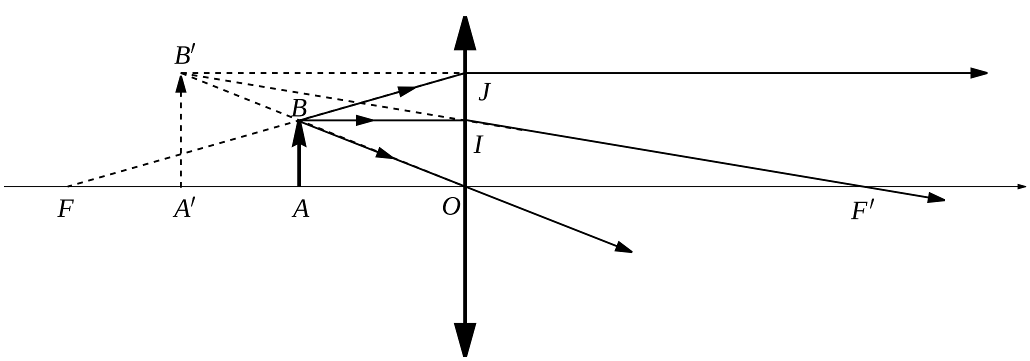


FIG. 37 – Lentille convergente : Cas b.

L'image $A'B'$ est **virtuelle et de même sens** que l'objet. Notons que cette situation est le mode de fonctionnement normal de la *loupe grossissante*.

II. Lentille divergente. Ici, on peut facilement se convaincre qu'il n'y a qu'un seul cas de figure : l'objet AB situé entre $-\infty$ et le centre O de la lentille (voir figure 38.).

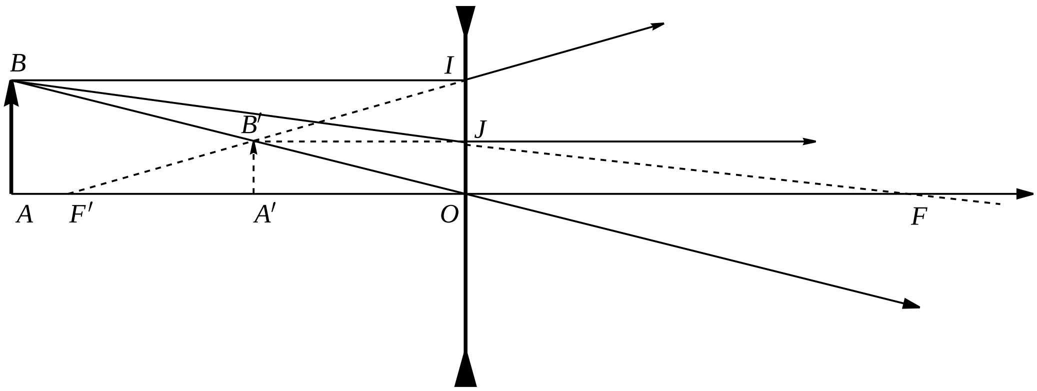


FIG. 38 – Lentille divergente.

L'image $A'B'$ est **virtuelle et de même sens** que l'objet.

Notons que dans tous les cas considérés, la construction de l'image $A'B'$ s'obtient par la construction des rayons suivants :

1. Le rayon BI est parallèle à l'axe optique, IB' passe donc par F'.

2. Le rayon BO passe par le centre O et n'est pas dévié.

3. Le rayon BJ passe par le foyer F, JB' est donc parallèle à l'axe optique.

Notons aussi que dans le cas d'un objet réel, lorsque l'image est du même côté de la lentille que l'objet, l'image est virtuelle. Lorsque l'image est située de l'autre côté, elle est réelle.

Exercice. Étudier le cas d'un *objet virtuel* AB. Cet objet virtuel est fourni par exemple par l'image virtuelle $A'B'$ obtenue dans le cas II ; une **image** virtuelle fournie par une première lentille pouvant servir d'**objet** virtuel pour une seconde lentille.

23 Formules des lentilles minces.

Ces formules permettent de calculer, connaissant les caractéristiques de la lentille, la position et la grandeur de l'image en fonction de celles de l'objet.

1. **Positions**. Sur l'axe optique orienté, nous poserons $\overline{OA} = p$, $\overline{OA'} = p'$, $\overline{OF} = f = -f' = -\overline{OF'}$. La formule fondamentale des lentilles minces donne alors

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f}$$

2. **Grandissement**. Considérons un objet rectiligne $\overline{AB}$. Nous orientons arbitrairement la droite perpendiculaire à l'axe optique qui supporte l'objet en question. Dans tous les cas de figure, en utilisant les triangles semblables OAB et $OA'B'$, nous avons la relation

$$\gamma \equiv \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Le rapport γ est le *grandissement* de l'image par rapport à l'objet, il vaut

$$\gamma = \frac{p'}{p}$$

Remarque. Pour des objets rectilignes, le grandissement est une quantité algèbrique parfaitement définie pour $p \neq 0$. Pour $p = 0$, on a obligatoirement $p' = 0$, on peut voir que $\lim_{p\to\infty}(p'/p) = 1$.

Exercice. Comment pourrait-on définir le grandissement pour un objet planaire ?

24 Vergence.

a. Une lentille convergente transforme un faisceau cylindrique parallèle à l'axe optique en un faisceau convergent de sommet le foyer F'. Ce faisceau est d'autant plus convergent que le module de la *distance focale* $|\overline{OF'}|$ est petite.

b. Une lentille divergente transforme un faisceau cylindrique parallèle à l'axe optique en un faisceau divergent de sommet le foyer F'. Ce faisceau est d'autant plus divergent que le module la *distance focale* $|\overline{OF'}|$ est petite.

Définition. On appel *vergence* D d'une lentille l'inverse de la distance focale f', c'est-à-dire la quantité

$$D = \frac{1}{f'}$$

Cette définition s'applique à tous les types de lentilles. Avec le sens positif adopté précédemment, la vergence est **positive** pour une lentille **convergente**, la vergence est **négative** pour une lentille **divergente**.

Unité. Lorsqu'on exprime f' en mètres, la vergence est mesurée en *dioptries* et sa dimension est $[f'] = L^{-1}$, l'inverse d'une longueur.

25 Système de lentilles.

Pour un système de lentilles, l'image d'un petit objet $\overline{AB}$, s'obtient par une application répétée des règles précédentes propres à chacune des lentilles constituant le système considéré (voir les exercices). Nous nous bornerons à donner un exemple d'une telle construction pour un système de deux lentilles convergentes et d'une lentille divergente (Figure. A) ainsi que le schéma d'un microscope simplifié (Figure. B).

Exercice. Sur les figures A et B, tracer la marche d'un faisceau lumineux issu du point B.

Il faut souligner, que le calcul des systèmes optiques réels tels que les objectifs photographiques et les lunettes d'approche par exemple n'utilise plus les constructions géométriques des rayons tels que nous l'avons exposé ici, mais des méthodes mathématiques plus élaborées telles que les méthodes matricielles, par exemple, et qui sont susceptibles d'un traitement informatique beaucoup plus performant.

Sixième partie

PRINCIPE de FERMAT

26 Chemin optique.

Supposons qu'un rayon lumineux parcoure en ligne droite le segment AB qui sépare deux point A et B d'un milieu homogène et isotrope d'indice n. On note l_{AB} la distance spatiale entre A et B. On appelle *chemin optique* entre A et B la quantité

$$L_{AB} = nl_{AB}$$

Propriétés.

1. Dans le vide $n = 1$, on a donc $L_{AB} = l_{AB}$.
2. Lorsque le milieu n'est plus homogène, l'indice devient devient une fonction $n(P)$ de P, point de l'espace où le rayon passe. Dans ce cas on peut définir le chemin optique qui sépare deux points très rapprochés voisins de P et distants de Δl. Le *chemin optique élémentaire* entre ces deux points vaut alors

$$\Delta L = n(P)\Delta l$$

Dans ces conditions, le chemin optique parcouru par un rayon lumineux selon une **courbe quelconque** allant de A en B se calcule en effectuant la somme des chemins optiques élémentaires obtenus en approximant la courbe par une ligne brisée allant de A en B, constituée de segments de droite $\{i\}$ de longueur Δl_i très petite. Le chemin optique parcouru par le rayon lumineux pour aller de A en B est alors pratiquement égal à la somme des chemins optiques des segments constituants la ligne brisée.

$$L_{AB} \simeq \sum_i \Delta L_i = \sum_i n(P_i)\Delta l_i$$

où P_i est un point appartenant au petit segment $\{i\}$.

Le chemin optique L_{AB} est donc approché par une somme de chemins optiques élémentaires $\Delta L_i = n(P_i)\Delta l_i$.

27 Principe de Fermat.

La propagation de la lumière d'un milieu d'indice n_1 vers un milieu d'indice n_2, séparés par une surface lisse se fait selon les lois de Snell-Descartes. Nous allons montrer que cela implique que le chemin optique parcouru par la lumière entre deux points A et B de part et d'autre de cette surface est *stationnaire* pour les chemins réels.

Nous simplifierons outrageusement le problème en ne considérant d'abord que la réfraction de rayons situés dans un même plan : le plan de réfraction perpendiculaire à la surface d'un dioptre plan.

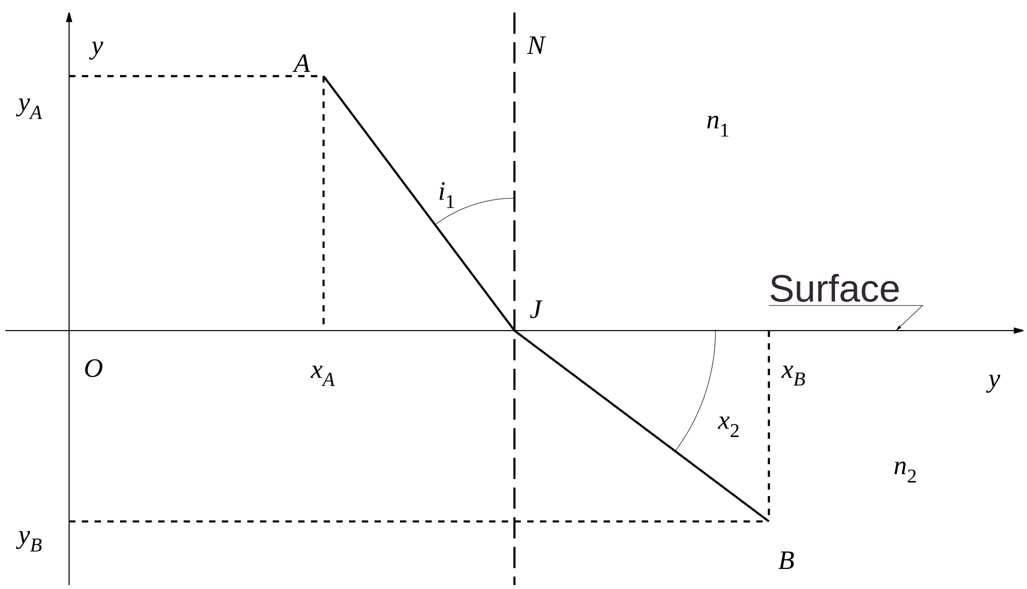


FIG. 39 – Principe de Fermat.

Le plan xOy est le plan de réfraction, on pose $x = \overline{OJ}$. On a pour $x_A < x < x_B$, les longueurs des segments AJ et JB

$$l_{AJ} = \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}$$

$$l_{JB} = \sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}$$

Et pour les longueurs des chemins optiques correspondants,

$$L_{AJ} = n_1 l_{AJ} = n_1 \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2}$$

$$L_{JB} = n_2 l_{JB} = n_2 \sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}$$

D'où la longueur optique entre A et B, qui ne dépend plus que de la variable x :

$$L_{AJB} = L_{AJ} + L_{JB} = n_1 l_{AJ} + n_2 l_{JB}$$

$$L_{AJB}(x) = n_1\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2} + n_2\sqrt{(x-x_B)^2 + y_B^2}$$

Calculons la dérivée par rapport à x de cette dernière expression

$$\frac{dL_{AJB}(x)}{dx} = n_1\frac{x-x_A}{\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2}} + n_2\frac{x-x_B}{\sqrt{(x-x_B)^2 + y_B^2}}$$

Or, on voit sur la figure que

$$\sin i_1 = \frac{x-x_A}{\sqrt{(x-x_A)^2 + y_A^2}}$$

$$\sin i_2 = -\frac{x-x_B}{\sqrt{(x-x_B)^2 + y_B^2}}$$

par conséquent

$$\frac{dL_{AJB}(x)}{dx} = n_1 \sin i_1 - n_2 \sin i_2$$

La loi de Snell-descartes est donc équivalente à la relation

$$\frac{dL_{AJB}(x_0)}{dx} = 0$$

ce qui veut dire que le rayon optique **réellement réfracté** obéissant à la relation de Snell-Descartes doit passer par le point J situé sur la surface à l'abscisse x_0 qui est une valeur de x où la dérivée de la fonction $L_{AJB}(x)$ s'annule.

Propriété. La longueur des chemins optiques est donc *stationnaire* pour des rayons réels joignant A et B.

Ce résultat est général : il reste encore vrai si nous ne supposons pas (comme nous l'avons fait) que le rayon réfracté reste a priori dans le plan normal au plan de séparaton des deux milieux ni que la surface de séparation des deux milieux soit un plan.

Exercice. Étudier le cas de la réflexion sur un miroir plan.

28 Mise en garde.

De la même façon qu'une dérivée nulle en un point pour une fonction ne signifie pas que la fonction admet un maximum ou un minimum en ce point, dire que le chemin optique est stationnaire entre deux points A et B, ne signifie pas que c'est le chemin optique le plus court entre A et B. Il se peut, dans certains cas, que cela soit même le plus long ! On pourra consulter à ce sujet (ainsi que sur bien d'autres sujets concernant l'optique géométrique) le cours de P. Fleury et J.P. Mathieu intitulé : Images optiques, paru chez Eyrolles.